Matrices

1 Produit matriciel

Exercice 1 (*)
Soient les matrices

$$A=\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}\quad B=\begin{pmatrix}4&-3&-1\\-2&1&1\end{pmatrix}\quad C=\begin{pmatrix}1&2\\-1&-2\end{pmatrix}$$

Calculer (s'ils ont un sens) les produits

$$AB, BA, AC, CA, BC, CB, B^2.$$

Exercice 2 (**)

$$A=\begin{pmatrix}1&3\\4&-3\end{pmatrix}$$

Trouver toutes les matrices colonne u telles que

$$Au=3u.$$

Exercice 3 (**)
Montrer que si la matrice A possède une ligne nulle, alors AB possède une ligne nulle.

2 Matrices qui commutent

Exercice 4 (**)
Pour A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$, on note

$$\mathrm{Com}(A)=\{M\in\mathcal{M}_3(\mathbf{R}),\ MA=AM\}$$

$\mathrm{Com}(A)$ désigne l'ensemble des matrices qui commutent avec A, c'est le *commutant de A*.

1. Montrer que $\mathrm{Com}(A)\neq\emptyset$.
2. Montrer que si $M,N\in\mathrm{Com}(A)$, alors
$$\forall(\lambda,\mu)\in\mathbf{R}^2,\quad \lambda M+\mu N\in\mathrm{Com}(A).$$
3. Pour $A=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&3\end{pmatrix}$, déterminer $\mathrm{Com}(A)$.

Exercice 5 (*)
Soit $(a,b)\in(\mathbf{R}^*)^2$, on considère la matrice $A=\begin{pmatrix}a&b\\0&a\end{pmatrix}$.
Trouver toutes les matrices $B\in\mathcal{M}_2(\mathbf{R})$ qui commutent avec A, c'est-à-dire telles que $AB=BA$.

Exercice 6 (**) (méthode)
Résoudre l'équation $X^2=A$ où $A=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&4&2\\0&0&16\end{pmatrix}$.

Indication[1]

Exercice 7 (**)
Résoudre l'équation

$$X^2-2X=\begin{pmatrix}-1&0\\6&3\end{pmatrix}$$

d'inconnue $X\in\mathcal{M}_2(\mathbf{R})$.

1. On pourra remarquer que A et X commutent.

Exercice 8 (***)
Déterminer l'ensemble des matrices qui commutent avec toutes les matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$.

Exercice 9 (***)
Trouver toutes les matrices A qui commutent avec les matrices symétriques.
S'inspirer de l'exercice 8.

3 Puissances

Exercice 10 (**)

$$A=\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}.$$

Calculer A^n pour $n\in\mathbf{N}$.
On pourra utiliser le binôme de Newton avec deux matrices bien choisies.

Exercice 11 (**)
Calculer A^k pour $k\in\mathbf{N}$:

$$A=\begin{pmatrix}1&&(2)\\&\ddots&\\(2)&&1\end{pmatrix}.$$

Exercice 12 (**)
Soit $n\geqslant 2$ un nombre entier,
On pose $(a,b)\in\mathbf{R}^2$ tels que $a\neq b$ et $a\neq(1-n)b$.
On définit la matrice $A\in\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ par

$$A=\begin{pmatrix}a&b&\dots&\dots&b\\b&\ddots&\ddots&b&\vdots\\\vdots&\ddots&\ddots&\ddots&\vdots\\\vdots&b&\ddots&\ddots&b\\b&\dots&\dots&b&a\end{pmatrix}.$$

1. Pour $p\in\mathbf{N}$, calculer A^p.
2. (a) Calculer
$$A^2-\big(2a+(n-2)b\big)A+(a-b)\big(a+(n-1)b\big)I_n.$$
   (b) En déduire que A est inversible et calculer A^{-1}.

Exercice 13 (**)
Une matrice *stochastique* est une matrice carrées à coefficients positifs et dont la somme des coefficients de chaque ligne vaut 1.
Montrer que si A est une matrice stochastique, alors, pour tout $k\in\mathbf{N}$, A^k est aussi stochastique.

Exercice 14 (***)
Soit A une matrice triangulaire supérieure stricte de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$. Montrer que $A^n=0$.
On pourra commencer par des exemples en petite dimension

4 Matrices inversibles

Exercice 15 (cours)**

1. Si $AB = 0$, peut-on avoir A et B non nulles ? Prouver.
2. Si $AB = 0$, peut-on avoir A ou B inversible ?
3. Si $AB = I_n$, que peut-on dire de l'inversibilité de A et/ou B ?
4. Si $AB \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{R})$ que peut-on dire de l'inversibilité de A et/ou B ?

Exercice 16 (*)

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

1. Exprimer A^2 en fonction de A et de I_3.
2. En déduire que A est inversible et calculer son inverse.

Exercice 17 (*)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

1. Exprimer $A^3 - A$.
2. En déduire que A est inversible et calculer son inverse.

Exercice 18 (*)

Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

1. Calculer A^2, A^3 puis trouver une relation linéaire entre A^3, A^2, A et I_3. En déduire que A est inversible et donner A^{-1}.
2. Montrer que A^2 est inversible et calculer $(A^2)^{-1}$.

Exercice 19 (*)
Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbf{K})$.

1. Trouver une relation linéaire entre A^2, A et I_2.
2. En déduire une condition suffisante pour que A soit inversible; donner alors l'expression de A^{-1}.

Exercice 20 (**)
Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.
Calculer $A^2 - 3A + 2I_3$, puis $A^3 - 3\,A^2 + 2\,A = 0$.
En déduire que A n'est pas inversible.

Exercice 21 (*)
Discuter selon les paramètres m et a l'inversibilité des matrices suivantes:

$$A = \begin{pmatrix} m & 1-m \\ 1-m & 4m \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} a-m & a-1 \\ a+1 & a-2-m \end{pmatrix}$$

5 Pivot de Gauss

Pas passionnant, mais il faut bien faire quelques calculs...

Exercice 22 (*)
Écrire la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ comme produit de matrices de transvections, dilatations, permutations.

Exercice 23 (*)
À l'aide d'opérations sur les lignes, donner la forme échelonnée réduite des matrices suivantes, en déduire leur rang.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & -2 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & -3 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -2 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & -2 & 3 & 0 \\ 2 & 4 & -3 & 6 & 4 \\ 1 & 1 & -1 & 4 & 6 \end{pmatrix}.$$

Exercice 24 (*)
Calculer l'inverse (s'il existe) des matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 1 & 3 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix},$$

$$B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & 1 \end{pmatrix}, \; C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -4 & 2 & -1 \\ 4 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 25 (**)
Soient $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ quatre nombres complexes. On considère le système linéaire

$$(\mathcal{S}) : \left\{ \begin{array}{rcrcrcrl} x & + & 3y & + & 4z & + & 7t & = \lambda_1 \\ x & + & y & + & z & + & t & = \lambda_2 \\ x & + & 3y & + & 3z & + & 2t & = \lambda_3 \\ x & + & 3y & + & 4z & + & 5t & = \lambda_4 \end{array} \right. .$$

Résoudre le système et en déduire l'inverse de la matrice

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 7 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}.$$

Exercice 26 (**)
Justifier que

$$A = \begin{pmatrix} 1 & & (-1) \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$$

est inversible et déterminer A^{-1}.
Indication [2]

Exercice 27 (***)
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$, montrer que

$$A \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{K}) \iff (\forall B \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K}),\ AB = 0 \Rightarrow B = 0).$$

2. Résoudre le système.

6 Synthèse

Exercice 28 (*)

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

1. Exprimer A^2 en fonction de A et de I_3.
2. En déduire que A est inversible et calculer son inverse.
3. (**méthode**)
   Montrer que pour tout $p \in \mathbf{N}$, il existe $(\alpha_p, \beta_p) \in \mathbf{R}^2$ tel que $A^p = \alpha_p A + \beta_p I_3$.
   Déterminer une relation de récurrence qui lie les suites $(\alpha_p)_{p\in\mathbf{N}}$ et $(\beta_p)_{p\in\mathbf{N}}$ ainsi obtenues.
4. Déterminer α_p et β_p en fonction de $p \in \mathbf{N}$.
   En déduire l'expression de A^p.

On pourra faire de même pour trouver A^p pour $p \leqslant -1$.

Exercice 29 (méthode)**

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -4 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -2 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Montrer que P est inversible et calculer son inverse.
2. Calculer $D = P^{-1}AP$ et vérifier que la matrice est diagonale.
3. Exprimer A en fonction de D, P et P^{-1},
   En déduire A^n en fonction de P, P^{-1} et des puissances de D.
4. En déduire l'expression de A^n pour tout $n \in \mathbf{N}$.

Exercice 30 (**)

Soit $A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Calculer A^2 et A^3.
2. La matrice A est-elle inversible ? si oui, donner son inverse.
3. En déduire A^n pour tout $n \in \mathbf{N}$.
4. En déduire A^n pour tout $n \in \mathbf{Z}$.

Exercice 31 (**)

Soient A, $B \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ deux matrices symétriques.

1. Trouver une condition nécessaire et suffisante sur A et B pour que le produit AB soit encore symétrique.
2. Les puissances successives de A sont-elles symétriques ?
3. Si A est inversible, A^{-1} est-elle symétrique ?

Exercice 32 (**)

1. Montrer que s'il existe $p \in \mathbf{N}^*$ tel que $A^p = 0$, alors A n'est pas inversible.
2. Montrer que s'il existe $p \in \mathbf{N}^*$ tel que $(A+I)^p = 0$, alors A est inversible et calculer son inverse.

Exercice 33 (**)

Idem à l'exercice 32 mais vu autrement.
Soit A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$.

1. Soit $q \in \mathbf{R}$, simplifier l'expression $(1-q)\sum_{k=0}^{p} q^k$.
2. On suppose que A est une matrice nilpotente : c'est-à-dire qu'il existe $r \in \mathbf{N}$ tel que $A^r = 0$.

   Montrer que $(I_n - A)$ est inversible et exprimer son inverse en fonction des puissances de A.
3. (***) À partir de l'expression de $(I_n - B)^{-1}$, retrouver le résultat de l'exercice 32.