MODÉLISATION DES VARIABLES ALÉATOIRES

1 ALGORITHMES DU COURS

EXERCICE 1 (Tirages dans des urnes)

On dispose d'une urne contenant p boules blanches et q boules noires.

1) On tire une boule au hasard dans l'urne. On note X la variable aléatoire qui vaut 1 si la boule est blanche et 0, sinon.

- **(a)** Donner la loi de X.
- **(b)** Modéliser l'expérience en Python : programmer une fonction qui effectue un tirage et renvoie la valeur de X.
- **(c)** Donner une approximation numérique de la valeur $\mathbb{P}(X = 1)$. Vérifier que l'on retrouve la valeur théorique.

2) Une expérience consiste à tirer successivement et avec remise n boules dans l'urne. On note X_n le nombre de boules blanches obtenues avec cette expérience.

- **(a)** Donner la loi de X_n.
- **(b)** Modéliser l'expérience en Python : programmer une fonction qui effectue l'expérience et renvoie la valeur de X_n.
- **(c)** Pour k fixé, donner une approximation numérique de la valeur $\mathbb{P}(X_n = k)$. Vérifier que l'on retrouve la valeur théorique.
- **(d)** Donner une approximation numérique de l'espérance de X_n. Vérifier que l'on retrouve la valeur théorique.

3) L'expérience consiste désormais à tirer successivement et *sans* remise, n boules dans l'urne. On note Y_n le nombre de boules blanches obtenues avec cette expérience.

- **(a)** Répondre aux mêmes questions que lors du tirage avec remise.

EXERCICE 2 (Mise en oeuvre des algorithmes précédents)

Une urne contient initialement une boule blanche et une boule noire. On effectue n tirages avec remise. Après chaque tirage, on rajoute une boule noire dans l'urne.

Ainsi, après le premier tirage, l'urne est composée d'une boule blanche et de deux boules noires. Et ainsi de suite pour les tirages suivants.

On note X_n la variable aléatoire égale au nombre de boules blanches tirées au cours des n premiers tirages.

1) Programmer l'expérience en Python.

2) Pour $n \in \mathbb{N}^*$ fixé et $k \in \mathbb{N}$, donner une valeur approchée de $\mathbb{P}(X_n = k)$ à l'aide de Python.

3) Donner un estimation de l'espérance de X_n (pour $n \in \mathbb{N}^*$ fixée).

4) Tracer l'allure de la suite $(\mathbb{E}(X_n))_{n\geq 1}$.

EXERCICE 3 (dé pipé)

Un sac contient 5 dés : 4 dés normaux et un dé pipé. Le dé pipé donne un 6, une fois sur trois ; il donne un 5, une fois sur 4, et les autres valeurs de façon équiprobable.

1) Programmer l'expérience en Python : la fonction doit renvoyer la somme de deux dés tirés aléatoirement dans le sac.

2) (***) On tire deux dés au hasard et on obtient 10. Estimer avec Python, la probabilité que l'on ait tiré le dé pipé.

Si on a le temps, on pourra généraliser à la somme de s dés parmi $n + p$, dont n sont normaux et p sont pipés et calculer la probabilité d'avoir tiré un dé pipé sachant que l'on a obtenu une certaine somme fixée.

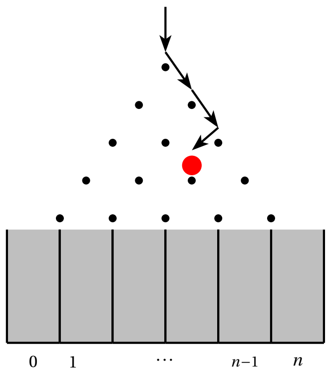
2 Application à des problèmes aléatoires

Exercice 4 (Planche de Galton)

La planche de Galton est une planche sur laquelle sont plantés des clous suivant un schéma pyramidal.

On fait tomber des billes qui ont pour chaque clou, autant de chances de passer à droite qu'à gauche.

En bas de la pyramide, chaque bille remplit un tube en fonction de la colonne d'arrivée.



On suppose que la planche comporte n rangées de clous. Initialement, la bille est lancée du point $\frac{n}{2}$. À chaque clou, si elle va à gauche, on retire $0,5$ à sa position, et si elle va à droite, on ajoute $0,5$.

On note X_n sa position après les n clous.

1) Vérifier que $X_n(\Omega) = [\![0, n]\!]$.

2) Programmer une fonction Python qui renvoie la valeur de X_n pour une expérience.

3) Programmer une fonction Python qui réalise `nb` fois cette expérience et affiche un graphique en histogramme, avec en abscisse les valeurs k de l'univers image et en ordonnée (hauteur de la barre) le nombre de fois que l'événement $X_n = k$ a été réalisé.

Exercice 5

On effectue des tirages avec remise dans une urne contenant n boules numérotées de 1 à n.

Pour tout entier $k \geq 2$, on note $V_k(n)$ la variable aléatoire égale au nombre de numéros distincts obtenus au cours des k premiers tirages.

Donner une conjecture numérique, à k fixé, sur la convergence de $\mathbb{E}(V_k(n))$ quand $n \to +\infty$ et la valeur de sa limite (on pourra prendre $k = 3$ par exemple).

Exercice 6 (Dés de Sicherman)

On définit deux dés équilibrés numérotés respectivement $[1,2,2,3,3,4]$ et $[1,3,4,5,6,8]$.

On lance les deux dés et on note X la variable aléatoire égale à leur somme.

Modéliser le lancer des deux dés et déterminer une loi de probabilité approchée de X. Que remarque-t-on ?