Les nombres complexes

1 Nombres complexes

Exercice 1 (*)
Donner la forme algébriques des expressions suivantes

1. $(1+ix)(1-ix)$
   pour $x \in \mathbf{R}$
2. $\dfrac{1+i\sqrt{3}}{\sqrt{3}-i}$
3. $\dfrac{1}{1+i\frac{\sqrt{3}}{3}}$
4. $\dfrac{(2-i)(5+2i)}{3-4i}$
5. $(1+i)^{2018}$
6. pour $n \in \mathbf{N}^*$, $(1+\cos\theta + i\sin\theta)^n$

Exercice 2 (*)
Donner la forme exponentielle des expressions suivantes (pour $n \in \mathbf{N}^*$)

1. $\sin x + i\cos x$ pour $x \in \mathbf{R}$
2. $\dfrac{e^{ix}-1}{e^{ix}+1}$ pour $x \in]-\pi,\pi[$
3. $-2i\,e^{ix}$ pour $x \in \mathbf{R}$
4. $\dfrac{(1-i\sqrt{3})^5}{(1+i)^3}$
5. $(1+i)^{2018}-(1-i)^{2018}$

Exercice 3 (*)
Mettre sous forme exponentielle ($\alpha \in \mathbf{R}$, $(x,y) \in \mathbf{R}^2$)
⚠Attention, le module est un réel positif.

1. $1-\,e^{-i\alpha}$
2. $\dfrac{1}{e^{ix}+\,e^{iy}}$
3. $1-i\tan\alpha \quad (\alpha \in]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[)$
4. $\left(\dfrac{1+\sqrt{2}+i\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)}{1+i}\right)^{2015}$
5. (***) $\sqrt{2+\sqrt{2}}+i\sqrt{2-\sqrt{2}}$
   Indication : Calculer $\cos^2(\theta)$ et linéariser.

Exercice 4 (*) (Interprétation géométrique)
Interpréter géométriquement les expressions suivantes

1. $|z| \leq 1$
2. $|z-i| \leq 2$
3. $|2z+i-1| > 1$
4. $\mathfrak{Re}\,(z) \geq -1$
5. $\mathfrak{Im}\,(z) < 0$
6. $0 \leq \arg(z) \leq \frac{\pi}{6}$
7. $0 \leq \arg(\frac{z}{1-i}) \leq \frac{\pi}{4}$
8. $|z-i| = |z+1|$

Exercice 5 (*)
Pour $n \in \mathbf{N}^*$, calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} i^k$.

Exercice 6 (*)
Déterminer l'ensemble des nombres complexes z tels que

1. $\dfrac{z}{z-i} \in \mathbf{R}$
2. $z^3 \in \mathbf{R}$ Interpréter géométriquement les solutions.
3. $\dfrac{1-iz}{1+iz} \in \mathbf{R}$

Exercice 7 (**) (Autour du nombre j)
On pose $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$

1. Calculer j^2 et j^3.
2. Calculer $j+j^2+j^3$.
   Donner une interprétation géométrique.

Dans la suite, A, B, C sont trois points du plan complexe d'affixes respectives a, b, c.

3. (***) Montrer que ABC est un triangle équilatéral direct si et seulement si
   $$a+jb+j^2c=0\,.$$
   Indication : faire un dessin !
4. En déduire que ABC est équilatéral si et seulement si
   $$a^2+b^2+c^2-(ab+ac+bc)=0\,.$$

Exercice 8 (***)
Calculer, pour $n \geq 3$, les trois sommes

$$A = \sum_{0\leq 3k\leq n}\binom{n}{3k} \qquad B = \sum_{0\leq 3k+1\leq n}\binom{n}{3k+1}$$
$$C = \sum_{0\leq 3k+2\leq n}\binom{n}{3k+2}$$

Indication[1]

2 Résolution d'équations

Exercice 9 (*)
Résoudre sur $\mathbb{C}$, les équations :

1. $z^2+z+1=0$.
2. $z^2+2z+4=0$
3. $z^2+3\sqrt{3}z+9=0$
4. $z^2+2z-\sqrt{2}=0$
5. $z^3+z^2+z=0$

1. Adapter une méthode déjà vue dans les exercices sur les sommes et produits et s'aider de l'exercice 7

Exercice 10 (*)
Trouver deux nombres complexes dont la somme est -1 et le produit est 1. Sont-ce les seuls ?

Exercice 11 (*)
Résoudre dans $\mathbf{C}$, les équations

1. $e^z = 5 + 5i$
2. $e^{2z} = \sqrt{2} + i\sqrt{6}$

Exercice 12 (**)
Trouver tous les couples $(u, v) \in \mathbf{C}^2$ solution du système

$$\begin{cases} u^2 + v^2 & = 0 \\ uv & = 1 \end{cases}$$

Exercice 13 (***)
Trouver l'ensemble des $z \in \mathbf{C}$ tels que

$$\overline{z}(z-1) = z^2(\overline{z-1})$$

Indication[2]

Exercice 14 (***)
Donner une condition nécessaire et suffisante sur $(A, B, C) \in \mathbf{C}^3$ pour que

$$\forall z \in \mathbf{U}, \quad Az + B\overline{z} + C = 0$$

Indication[3]

Exercice 15 (* *)**
Déterminer les droites du plan complexe qui ont pour image une (portion de) droite par l'application exponentielle.
Indication : faire des schémas.

3 Trigonométrie

Exercice 16 (*)
Linéariser

1. $\cos^4 x \sin x$
2. $\sin^2 x \cos^3 x$
3. $\cos^4 x \sin^3 x$

Exercice 17 (***)
Résoudre $\sin\, x + \sin\, 2x + \sin\, 3x = 0$.

Exercice 18 (**)
Écrire les expressions suivantes comme des produit de cosinus et sinus en $\frac{p+q}{2}$ et $\frac{p-q}{2}$.

1. $\sin p + \sin q$
2. $\sin p - \sin q$
3. $\cos p + \cos q$
4. $\cos p - \cos q$

Exercice 19 (**) (grand classique)
Soit $\theta \in \mathbf{R}$ et $n \in \mathbf{N}$, Donner une expression, sans le signe $\sum$, de

$$C_n = \sum_{k=0}^{n} \cos(k\theta) \qquad S_n = \sum_{k=0}^{n} \sin(k\theta)$$

$$T_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cos(k\theta)$$

Exercice 20 (***)
Calculer $\sin(5a)$ en fonction de $\sin a$ et de ses différentes puissances.
En déduire la valeur de $\sin(\frac{\pi}{5})$

2. S'aider des modules.
3. $z \in \mathbf{U} \iff |z|^2 = 1$