Les nombres réels

1 Résolution d'équations et inéquations

Exercice 1 (*)
Résoudre et représenter graphiquement les solutions des inégalités suivantes :

1. $\dfrac{x+3}{x-5} < 1$
2. $\dfrac{x+3}{x-5} < 0$
3. $(x-2)(x-1) < 0$
4. $x < \dfrac{1}{x}$

Exercice 2 (*)
Résoudre les inégalités suivantes :

1. $-x^3 + 2x^2 \geq 0$
2. $2x^2 - 4x - 6 \geq 0$
3. $x^3 + 5x^2 + 8x + 6 < 2$
4. $x^3 + x^2 - 5x - 5 \leq 0$

Exercice 3 (*)
Résoudre les inégalités suivantes :

1. $|x-5| < 2$
2. $|x+1| > 3$
3. $\dfrac{1+x}{1-x} < |x-1|$

Exercice 4 (**)
Résoudre les égalités suivantes :

1. $x|x| = 3x + 2$
2. $|x+2| + |3x-1| = 4$
3. $|x^2 + x - 3| = |x|$
4. $x + |x| = \dfrac{2}{x}$

Exercice 5 (**)
Résoudre les égalités suivantes :

1. $\ln\left((x+2)(x-1)\right) = \ln 2$
2. $x + \sqrt{2x+1} = 1$

Exercice 6 (*)
Montrer que

$$\forall x > 0,\ \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) > \frac{1}{1+x}$$

2 Majorants-minorants

Exercice 7 (*)
Soient A et B deux parties non vides majorées de $\mathbf{R}$ telles que $A \subset B$.
Montrer que $\sup A \leq \sup B$.

Exercice 8 (**)

1. La fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ est-elle majorée sur $\mathbf{R}_+^*$, est-elle minorée sur ce même intervalle ?
2. Donner sa borne inférieure en justifiant. Est-ce un minimum ?

Exercice 9 (**)

$$E = \{1 - (-1)^n,\ n \in \mathbf{N}\}$$

1. L'ensemble est-il majoré ? minoré ?
2. S'il est majoré, donner sa borne supérieure, est-ce un maximum ?
3. S'il est minoré, donner sa borne inférieure, est-ce un minimum ?

Exercice 10 (**)

$$E = \left\{\frac{2n-1}{n},\ n \in \mathbf{N}^*\right\}$$

1. L'ensemble est-il majoré ? minoré ?
2. S'il est majoré, donner sa borne supérieure, est-ce un maximum ?
3. S'il est minoré, donner sa borne inférieure, est-ce un minimum ?

Exercice 11 (**)
On définit la suite (u_n) par $u_0 = 1$ et

$$\forall n \in \mathbf{N},\ 3u_{n+1} + 2u_n + 1 = 0$$

1. Pour tout entier n, trouver l'expression de u_n en fonction de u_0 et de n.
2. Donner $\sup\{u_n,\ n \in \mathbf{N}\}$. Justifier
3. Donner $\inf\{u_n,\ n \in \mathbf{N}\}$. Justifier

Exercice 12
On considère les fonctions a et b définies sur $\mathbf{R}$ par:

$$a(x) = \begin{cases} 2-x & \text{si } x \geq 3 \\ x^2 & \text{si } x < 3 \end{cases}$$

$$b(x) = \begin{cases} 1+1/x & \text{si } x > 0 \\ \sqrt{(-x)} & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$$

1. Les fonctions sont-elles majorées ? minorées ?
2. Si elles sont majorées, donner leur borne supérieure, est-ce un maximum ?
3. Si elles sont minorées, donner leur borne inférieure, est-ce un minimum ?

3 Partie entière

Exercice 13 (**)
Démontrer que $\forall (x,y) \in \mathbf{R}^2$,

$$\lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor \leq \lfloor x+y \rfloor \leq \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + 1$$

Exercice 14 (**)
Démontrer que $\forall x \in \mathbf{R}$, $\forall n \in \mathbf{N}^*$,

$$\left\lfloor \frac{1}{n} \lfloor nx \rfloor \right\rfloor = \lfloor x \rfloor$$

4 Inégalités plus sophistiquées

Exercice 15 (*)
Démontrer que pour tout $(x,y) \in \mathbf{R}^2$,

$$\min(x,y) = \frac{(x+y) - |x-y|}{2}$$

$$\max(x,y) = \frac{(x+y) + |x-y|}{2}$$

Exercice 16 (**)

1. Résoudre dans $\mathbf{R}$, l'inéquation suivante :
$$x^2 - x - 1 \geq 0$$
2. Résoudre dans $\mathbf{R}$, la chaîne d'inéquations suivantes :
$$1 + x - x^2 \leq x^2 - 3x + 1 \leq x^2 - x - 1$$
3. Résoudre dans $\mathbf{R}$, l'inéquation :
$$|x^2 - 3x - 1| \leq x^2 - x - 1$$

Exercice 17 (**)
Soient $(a,b) \in \mathbf{R}_+^2$, non tous nuls.
Montrer que

$$\frac{2ab}{a+b} \leq \sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}$$

Vocabulaire :
$\frac{a+b}{2}$ est la moyenne arithmétique,
$\sqrt{ab}$ est la moyenne géométrique,
$\frac{2ab}{a+b}$ est la moyenne harmonique.

Exercice 18 (**)
On définit f sur $\mathbf{R}_+$ par

$$f : x \mapsto \sup_{n \in \mathbb{N}} \frac{x^n}{n!}$$

Montrer que f est bien définie sur $\mathbf{R}_+$ et donner son expression sans utiliser les bornes supérieures (ou inférieures).

Exercice 19 (***)

1. Soient $(x,y) \in \mathbf{R}^2$, montrer que $(x+y)^2 \geq 4xy$
2. En déduire que
$$\forall (a,b,c) \in (\mathbf{R}_+)^3,\ (a+b)(b+c)(c+a) \geq 8abc$$

Exercice 20 (***)
Montrer que pour tout $n \geq 3$,

$$\sqrt{n} < \sqrt[n]{n!}$$

où $\sqrt[n]{x}$ désigne $x^{\frac{1}{n}}$

Exercice 21 (***)
Prouver que pour tout $n \in \mathbf{N}^*$,

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \leq \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} < 3$$

Indication[1]

Exercice 22 (***)

1. (*) Montrer que $\forall x \in [0,1]$, $0 \leq x(1-x) \leq \frac{1}{4}$
Retenir cette inégalité.
2. En déduire que $\forall (a,b,c) \in [0,1]^3$,
$$\min\left(a(1-b), b(1-c), c(1-a)\right) \leq \frac{1}{4}$$

1. Penser à Newton pour la première inégalité, pour la seconde, essayer de comparer avec une somme géométrique.