TD 3 - Sommes

⚠ Apporter un soin très particulier à la rigueur, surtout pour le traitement des inégalités.

Exercice 1
Soient $a_1, a_2, \cdots, a_n$ des réels strictement positifs.
On pose

$$S = \sum_{k=1}^{n} a_k \qquad \text{et} \qquad T = \sum_{k=1}^{n} a_k^{\frac{k-1}{k}}.$$

Soit $\lambda > 1$. Pour $k \geqslant 1$, on définit la fonction f_k sur $\mathbf{R}_+^*$ par

$$\forall x > 0, \qquad f_k(x) = x^{\frac{k-1}{k}} - \lambda x.$$

On rappelle que $\forall \alpha \in \mathbf{R}$, $\forall x > 0$, $x^\alpha = \mathrm{e}^{\alpha \ln x}$.

1) **(a)** Pour $k \geqslant 2$, étudier les variations de f_k sur $\mathbf{R}_+^*$ et en déduire que f_k admet un maximum en un point x_k dont on déterminera l'expression.

(b) En déduire que $\forall k \in [\![2, n]\!],\ f_k(a_k) \leqslant \frac{1}{\lambda^{k-1}}$.

(c) A-t-on également $f_k(a_k) \leqslant \frac{1}{\lambda^{k-1}}$ pour $k = 1$?

2) Montrer que

$$T < \lambda S + \frac{\lambda}{\lambda - 1}.$$

3) Pour $x > 1$, on définit $g(x) = xS + \dfrac{x}{x-1}$.

(a) Montrer que g admet un minimum sur $]1; +\infty[$ que l'on précisera.

(b) En déduire que

$$\sqrt{T} < \sqrt{S} + 1.$$