

## PETITS CALCULS AVEC LES FONCTIONS

### Exercice 1 (Domaine de définition)

Chercher le domaine de définition (en justifiant).

- |   |   |
|---|---|
| 1) $x \mapsto \sqrt{1-x^2}$ .                             | 6) $x \mapsto \frac{1}{\ln(x^2+x+1)}$ . |
| 2) $x \mapsto \ln\left(x - \frac{1}{2-x}\right)$ .        | 7) $x \mapsto \ln(x - \ln(x))$ .        |
| 3) $x \mapsto \ln\left(2 - \frac{1}{\sqrt{x}-3}\right)$ . | 8) $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x}-x}$ .   |
| 4) $x \mapsto \ln( x+1 )$ .                               | 9) $x \mapsto \frac{1}{x+e^{-x}}$ .     |
| 5) $x \mapsto \sqrt{\frac{2x-1}{\ln(x)}}$ .               |   |

### Exercice 2 (Limites)

Étudier pour  $x \rightarrow +\infty$ .

Faire l'étude complète de la branche en s'aidant du vademecum sur l'étude de fonctions.

- |                                      |  |
|--------------------------------------|--|
| 1) $3x\sqrt{x} - x^2$ .              | 8) $e^{-x^2} \ln(1+e^x)$ .               |
| 2) $x + \sin(x)$ .                   | 9) $\ln(1+e^x)$ .                        |
| 3) $\frac{x \sin(x)}{\ln(x)}$ .      | 10) $\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}$ .          |
| 4) $\ln(x + e^{-x})$ .               | 11) $\sqrt{x^2+1} - \sqrt{x^2-x}$ .      |
| 5) $\ln(2e^{3x} - x)$ .              | 12) $\frac{\ln(1+\sqrt{x})}{1+\ln(x)}$ . |
| 6) $\frac{e^{-x^2}}{x + e^{-x^3}}$ . | 13) $\frac{\ln(1+\sqrt{x})}{1+e^x}$ .    |
| 7) $x e^{-\sqrt{\ln(x)}}$ .          | 14) $\ln(x) + x \sin(x)$ .               |

### Exercice 3

Dans chaque cas, déterminer le domaine de définition de la fonction et les intervalles de dérivabilité. Puis calculer la dérivée.

- |  |   |
|--|---|
| 1) $f_2 : x \mapsto \left(\frac{2x+1}{4-x}\right)^5$ . | 3) $f_4 : x \mapsto \frac{\sqrt{x}}{x-2}$ .       |
| 2) $f_3 : x \mapsto (1-x)\sqrt{x}$ .                   | 4) $f_5 : x \mapsto x \ln^n(x)$ pour $n \geq 1$ . |

### Exercice 4

Déterminer le domaine de dérivabilité et calculer la dérivée.

- |   |  |
|---|--|
| 1) $f_1 : x \mapsto x^2 \sin(3x^2+6)$ .                 | 7) $f_7 : x \mapsto \sqrt{x+\sqrt{x}}$ .               |
| 2) $f_2 : x \mapsto (1+\cos(x))^2$ .                    | 8) $f_8 : x \mapsto \ln\left(\frac{x+2}{x-1}\right)$ . |
| 3) $f_3 : x \mapsto \frac{e^{\cos(x)}}{e^{\sin(x)}}$ .  | 9) $f_9 : x \mapsto \ln(\sqrt{x^2+1}-x)$ .             |
| 4) $f_4 : x \mapsto \sqrt{2x^2-3}$ .                    | 10) $f_{10} : x \mapsto \sqrt{2+\cos(x^2)}$ .          |
| 5) $f_5 : x \mapsto \sin\left(\frac{1}{1+x^2}\right)$ . | 11) $f_{11} : x \mapsto \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$ .      |
| 6) $f_6 : x \mapsto \left(\frac{3x}{1-x}\right)^3$ .    | 12) $f_{12} : x \mapsto \sqrt{\frac{x-2}{x-3}}$ .      |

### Exercice 5

Étudier la dérivabilité des fonctions suivantes au point  $a$ , et calculer  $f'(a)$  le cas échéant.

- |  |  |
|--|--|
| 1) $f_1 : x \mapsto \sqrt{x^2+3x-10}$ en $a=2$ . | 4) $f_4 : x \mapsto \sqrt{4x^3-4x^2+x}$ en $a=\frac{1}{2}$ . |
| 2) $f_2 : x \mapsto \frac{2x}{ x +4}$ en $a=0$ . | 5) $f_5 : x \mapsto \sqrt{x\sqrt{x}}$ en $a=0$ .             |
| 3) $f_3 : x \mapsto x + \sqrt{4-x^2}$ en $a=2$ . |  |

*Rappel :* utiliser la définition de la dérivée à partir de la limite du taux d'accroissement.

### Exercice 6 (\*)

Déterminer une primitive pour chacune des fonctions suivantes sur l'intervalle  $I$  indiqué.

- |   |   |
|---|---|
| 1) $f_1 : x \mapsto x^3 - 5x$ sur $I = \mathbf{R}$ .    | 3) $f_3 : x \mapsto \frac{\sin(x)}{\cos^3(x)}$ sur $I = [0, \frac{\pi}{2}[$ . |
| 2) $f_2 : x \mapsto 5x(x^2-1)^7$ sur $I = \mathbf{R}$ . | 4) $f_4 : x \mapsto \frac{\sin(x)}{1+\cos(x)}$ sur $I = [0, \frac{\pi}{2}]$ . |