PYTHON : POLYNÔMES

A Modélisation

Dans ce TD, on travaillera exclusivement avec les polynômes à coefficients réels.
On se propose de modéliser un polynôme de degré n par la liste de ses coefficients. Un polynôme de degré n est donc modélisé par une liste de longueur $n+1$. L'élément d'indice k de la liste correspond au coefficient de X^k.
On prendra comme exemples (vous pourrez aussi essayer avec d'autres)

```
p=[0,1,5,2,0,3]
q=[1,1,2]
```

Le polynôme nul est codé sous la forme `[0]` et non par une liste vide.

1) Programmer une fonction `somme` qui prend en argument deux polynômes `p` et `q` et qui renvoie leur somme.
Faire attention au degré : il ne faut pas de coefficients nuls en fin de liste.

2) Programmer une fonction `produitScal` qui prend en argument un flottant `a` et un polynôme `p` et qui renvoie leur produit.

3) Programmer une fonction `produit` qui prend en argument deux polynômes `p` et `q` et qui renvoie leur produit.

4) Programmer une fonction `eval` qui prend en argument un polynôme `p` et un flottant `a` et qui renvoie la valeur de $p(a)$.

5) Programmer une fonction Python `trace` qui prend en argumet un polynôme `p`, et deux flottants `xmin` et `xmax` et qui trace la courbe de l'application polynomiale associée à `p` entre `xmin` et `xmax`.

6) Programmer une fonction `arrondi` qui prend en argument un polynôme `p` et un entier `n` et qui renvoie le polynôme dont les coefficients sont les arrondis de ceux de `p` à la $n^{\text{ième}}$ décimale.
On veillera à ce que le coefficient dominant du polynôme arrondi soit non nul.
Si le polynôme arrondi est nul, alors on renverra le polynôme nul (et non le polynôme vide).

B Polynômes interpolateurs de Lagrange

On rappelle que pour $n+1$ points du plan (x_i, y_i), il existe un unique polynôme de degré n qui passe par ces points.
Si on note $L_i = \prod_{\substack{k=0 \\ k\neq i}}^{n} \frac{X-x_k}{x_i-x_k}$, alors le polynôme interpolateur est $P = \sum_{i=0}^{n} y_i L_i$

1) Programmer une fonction `lagrange` qui prend en argument une une liste de points (représentés par des couples), et qui renvoie le polynôme interpolateur de Lagrange (arrondi à 5 décimales). Tester cette fonction avec

```
x=linspace(-1,1,6)
y=[eval(p,a) for a in x]
points=[(x[i],y[i]) for i in range(len(x))]
lagrange(points)
```

On doit obtenir le polynôme `p` comme résultat. Expliquer pourquoi.

2) Pour une liste de points fixée, programmer une fonction Python qui affiche ces points (non reliés entre eux) ainsi que le polynôme interpolateur de Lagrange.

3) **(a)** Pour $f : x \mapsto \cos(3\pi x)$, prendre n points répartis uniformément sur $[-1,1]$, puis tracer dans un même graphique la courbe représentative de f et celle de l'application polynômiale de l'interpolateur.
Que remarque-t-on lorsque l'on augmente la valeur de n ?

(b) Faire de même avec $f : x \mapsto \mathrm{e}^{-\frac{1}{(10x+10^{-5})^2}}$ sur $[-1,1]$ (le 10^{-5} sert à éviter les instabilités numériques en 0)

C Polynômes de Tchebychev

La question est de trouver où placer les points $(x_0, x_1, \cdots, x_n)$ pour que l'approximation avec les polynômes de Lagrange minimise la distance maximale entre les deux courbes.

Pour cela, on définit la suite de polynômes $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $T_0 = 1$, $T_1 = X$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $T_{n+2} = 2XT_{n+1} - T_n$.

1) **(a)** Calculer T_0, T_1, T_2, T_3. Quel est le degré de T_n ?

(b) Programmer une fonction Python `tchebychev(n)` qui renvoie le $n^{\text{ième}}$ polynôme de la suite : T_n.

2) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in [-1,1],\ T_n(x) = \cos(n \arccos x)$.

3) **(a)** Étudier la parité de T_n en fonction de l'entier n.

(b) Déterminer les racines de T_n qui appartiennent à $[-1,1]$

(c) En déduire *toutes* les racines de T_n dans $\mathbb{R}$. Préciser leur multiplicité.

4) Choisir les racines réelles de T_n comme abscisses des points d'interpolation de Lagrange sur $[-1,1]$

(a) pour $x \mapsto \mathrm{e}^x$

(b) pour $x \mapsto \cos(3\pi x)$

Comparer graphiquement la qualité de l'approximation par rapport à celle obtenue en partie B.