Polynômes à une indéterminée

1 Manipulations algébriques

Exercice 1 (*)
Calculer les produits de P et Q.

1. $P = 1 + X + 3X^2 - X^5$ et $Q = X$.
2. $P = 1 + X + 3X^2 - X^5$ et $Q = X + X^2 - X^4$.
3. $P = 1 + X + X^2 + X^3 + X^4 + X^5$ et $Q = X - 1$.

Exercice 2 (**)

1. À l'aide du polynôme $P = (1+X)^n$, montrer que
$$\forall n \in \mathbf{N}^*, \forall k \in [\![1, n]\!],\ k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}.$$
Indication[1]
2. À l'aide du polynôme $P = (1+X)^{2n}$, montrer que
$$\forall n \in \mathbf{N}^*,\ \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}.$$
3. Montrer que $\displaystyle\sum_{k=0}^{p} \binom{n}{k}\binom{m}{p-k} = \binom{m+n}{p}$.

Exercice 3 (**)
On définit une suite de polynômes (P_n) par
$$P_0 = 1,\ P_1 = X \text{ et } \forall n \geqslant 0, \qquad P_{n+2} + P_n = 2XP_{n+1}.$$

1. Calculer P_2 et P_3.
2. Déterminer le degré et le coefficient dominant de P_n.
3. Déterminer la parité de P_n.
Calculer $\widetilde{P_n}(1)$, puis $\widetilde{P_n}(-1)$.

2 Racines et factorisation

Exercice 4 (*)
Factoriser sur $\mathbf{R}$ et sur $\mathbf{C}$ en produit d'irréductibles.

1. $X^3 - X^2 - 2\,X$
2. $X^8 - 3\,X^7 + 4\,X^6 - 5\,X^5 + 4\,X^4 - X^3 + X - 1$
3. $X^7 - X^2$
4. $2\,X^4 - 10\,X^3 + 24\,X^2 - 28\,X + 16$
Indication : on sait que $(1+i)$ est racine.
5. $P = X^4 - 5X^3 + 7X^2 - 5X + 6$
6. $P = X^4 - 2\,X^3 + 4\,X^2 + 2\,X - 5$
7. $P = X^4 + X^3 - X^2 + X - 2$
8. $P = X^4 - X^2 + 1$

Exercice 5 (***) (calculatoire)
Pour $n \in \mathbf{N}^*$, factoriser sur $\mathbf{R}$ et sur $\mathbf{C}$ en produit d'irréductibles.

1. $X^{2n} + 1$
2. $X^{2n+1} + 1$

Exercice 6 (**)
On considère le polynôme
$$P = (X+1)^{2n+1} - X^{2n+1} - 1.$$

1. Montrer que $X^2 + X$ factorise P.
2. Est-ce que (-1) est racine double de P ?

Exercice 7 (**)
Soit le polynôme scindé
$$P = aX^3 + bX^2 + cX + d \in \mathbf{C}[X]$$
avec $a \neq 0$ et de racines x, y, z.

1. Exprimer $x + y + z$, $xy + xz + yz$ et xyz en fonction de a, b, c, d.
2. Résoudre dans $\mathbb{C}^3$ les systèmes suivants :
$$(1) \begin{cases} x + y + z = 2 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 2 \\ xyz = 0 \end{cases}$$
$$(2) \begin{cases} x + y + z = 6 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 14 \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{11}{6} \end{cases}$$

Exercice 8 (***)
Soient $P \in \mathbf{C}[X]$ et $n \in \mathbf{N}$. Montrer que si $P(X^n)$ est factorisable par $X - 1$ alors il l'est aussi par $X^n - 1$.

3 Fonctions polynomiales

Exercice 9 (*)
Pour chacune des fonctions suivantes, dire si elle est polynomiale et le justifier.

1. $f : x \mapsto \cos x$
2. $f : x \mapsto \mathrm{e}^x$
3. $f : x \mapsto \dfrac{(x+1)^{2016} - (1-x)^{2016}}{x}$
4. $f : x \mapsto \dfrac{1}{x}$

4 Équations de polynômes

Exercice 10 (*)
Soit $P \in \mathbf{K}[X]$, tel que $P(X+1) = P(X)$.

1. Montrer que $\forall n \in \mathbf{N},\ P(n) = P(0)$.
2. En déduire que P est constant.

1. Penser à la dérivée.

Exercice 11 (**)
Déterminer tous les polynômes
$P \in \mathbf{R}[X]$ tel que $P = P'P''$. *Indication*[2]

Exercice 12 (**)
Trouver tous les polynômes $P \in \mathbf{R}[X]$ tels que

$$P(X^2) = (X^2+1)P(X).$$

Exercice 13 (**)
Déterminer tous les polynômes $P \in \mathbf{C}[X]$ tels que

$$\forall x \in \mathbf{R},\ P(x) \in \mathbf{R}.$$

Exercice 14 (**)
Résoudre sur $\mathbf{R}[X]$, $(P')^2 = 4P$.

Exercice 15 (***)
On veut trouver tous les polynômes
$P \in \mathbf{R}[X]$, tels que P' factorise P.

1. Analyse
   (a) En supposant P solution, trouver une relation entre P'' et P
   (b) En déduire que les polynômes solution sont nécessairement de la forme $\lambda(X-\omega)^n$, avec λ, ω deux réels.
2. Rédiger la synthèse.

5 Matrices

Exercice 16 (***)
Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

1. Vérifier que $(A-6I)(A^2-3I) = 0$.
   On dit que $P = (X-6)(X^2-3)$ est un polynôme annulateur de A.
2. Soit $n \in \mathbf{N}$.
   On admet qu'il existe deux polynômes $Q_n \in \mathbf{R}[X]$ et $R_n \in \mathbf{R}_1[X]$ tels que
   $$X^n = PQ_n + R_n.$$
   Exprimer R_n.
3. En déduire les coefficients de la matrice A^n en fonction de n.

6 Grands classiques

Exercice 17 (***) (Polynômes interpolateurs de Lagrange)
Soit $n \in \mathbf{N}^*$, $(a_1, a_2, \cdots, a_{n+1}) \in \mathbf{K}^{n+1}$ deux à deux distincts.

1. Montrer qu'il existe un unique polynôme unitaire de degré exactement n qui s'annule en $a_1, a_2, \cdots, a_n$.
   Donner l'expression de ce polynôme.
2. Montrer que pour tout $k \in [\![1; n+1]\!]$, il existe un unique polynôme L_k de degré exactement n tel que
   $$\forall i \in [\![1; n+1]\!],\ \widetilde{L_k}(a_i) = \delta_{ik}.$$
   Donner l'expression de L_k.
   δ_{ik} désigne le symbole de Kronecker qui vaut 1 si $i = k$ et 0 sinon. *Indication*[3]
3. Soient $(b_1, b_2, \cdots, b_{n+1}) \in \mathbf{K}^{n+1}$.
   À partir d'une combinaison linéaire des L_k, montrer qu'il existe un unique polynôme $P \in \mathbf{K}_n[X]$ tel que pour tout $i \in [\![1; n+1]\!]$, on ait
   $$\widetilde{P}(a_i) = b_i.$$
4. Donner une expression très simple du polynôme
   $$P = \sum_{k=1}^{n+1} L_k.$$

Exercice 18 (***)
Soit $\theta \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right[$ et $n \in \mathbf{N}$.
On définit la fonction cotangente par $\operatorname{cotan}\theta = \dfrac{\cos\theta}{\sin\theta}$ lorsque cela est défini.

1. Montrer qu'il existe un polynôme P_n tel que
   $$\sin((2n+1)\theta) = (\sin\theta)^{2n+1} P_n(\operatorname{cotan}^2\theta).$$
2. Expliciter P_n.
3. (a) Montrer que $\forall k \in [\![1, n]\!]$, $\operatorname{cotan}^2 \frac{k\pi}{2n+1}$ est racine de P_n.
   (b) Montrer que les $\left(\operatorname{cotan}^2 \frac{k\pi}{2n+1}\right)_{k \in [\![1,n]\!]}$ sont deux à deux distinctes.
   (c) En déduire que ce sont les seules racines de P_n et que le polynôme est scindé sur $\mathbf{R}$.
4. En déduire que
   $$s_n = \sum_{k=1}^{n} \operatorname{cotan}^2 \frac{k\pi}{2n+1} = \frac{n(2n-1)}{3}.$$
   Indication[4]
5. (a) Vérifier que pour tout $a \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right[$,
   $$0 < \sin a < a < \tan a.$$
   (b) Calculer $1 + \operatorname{cotan}^2 a$ en fonction de $\sin a$.
   (c) En déduire que pour tout $a \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right[$,
   $$\operatorname{cotan}^2 a < \frac{1}{a^2} < 1 + \operatorname{cotan}^2 a.$$
6. Montrer la limite :
   $$\lim_{n \to +\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

2. Penser aux degrés.
3. Existence : choisir un polynôme comme à la question précédente, et prendre le bon coefficient dominant.
4. Utiliser les relations coefficients racines.