Primitives

1 Recherche de primitives « simples »

Exercice 1 (*)
Préciser à chaque fois si F est une primitive de f.

1. $F(x) = x + 1$ et $f(x) = 1$.
2. $F(x) = x^2 - 5x + 3$ et $f(x) = x - 5$.
3. $F(x) = x^x$ et $f(x) = (\ln(x) + 1)\, x^x$.
4. $F(x) = 2x - 1$ et $f(x) = x^2 - x$.
5. $F(x) = \frac{1}{x}$ et $f(x) = \ln|x|$.
6. $F(x) = \arctan(x)$ et $f(x) = \frac{1}{x^2+1} - \frac{\pi}{2}$.

Exercice 2 (*)
Trouver les primitives de chacune des fonctions suivantes :

1. $t \mapsto \mathrm{e}^{3t}$.
2. $t \mapsto \sin\left(\frac{t}{5}\right)$.
3. $t \mapsto t^5 + 2t^3 - t - 1$
4. $t \mapsto (t-1)\,(t+1)$.
5. $t \mapsto \cos^2(t) + \sin^2(t)$.
6. $t \mapsto \cos^2(t) - \sin^2(t)$.
7. $t \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{t}}$.
8. $t \mapsto \ln(t+1)$.
9. $t \mapsto t(t^2+1)^n$.
10. $t \mapsto \dfrac{\cos\left(\sqrt{t}\right)}{\sqrt{t}}$.

Exercice 3 (*)
Donner une primitive de

1. $t \mapsto \tan t$.
2. $t \mapsto \dfrac{t+2}{t^2+4t}$.
3. $t \mapsto \dfrac{t+2}{\sqrt{t^2+4t}}$.
4. $t \mapsto te^{5t^2}$.
5. $t \mapsto \sin(t)\cos(t)$.
6. $t \mapsto \dfrac{t}{t^2-5}$.
7. $t \mapsto \dfrac{\mathrm{e}^t - \mathrm{e}^{-t}}{\mathrm{e}^t + \mathrm{e}^{-t}}$.
8. $t \mapsto \tan^2(t)$.
9. $t \mapsto \dfrac{\sin(t)}{\cos^3(t)}$.

Exercice 4 (**)
Donner une primitive

1. $t \mapsto \dfrac{\ln^4(t)}{t}$.
2. $t \mapsto \dfrac{1}{t\ln(t)}$.
3. $t \mapsto \dfrac{1}{\cos^2(t)\sqrt{\tan(t)}}$.

Exercice 5 (***)
Donner une primitive de

1. $t \mapsto \dfrac{\ln(t)-1}{t^2}$.
2. $t \mapsto \dfrac{1}{t+\sqrt{t}}$.
3. $t \mapsto \mathrm{e}^t\left(\dfrac{1}{t} + \ln(t)\right)$.
4. $t \mapsto \dfrac{t\cos(t) - \sin(t)}{t^2}$.

Exercice 6 (**)
Calculer
$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1+\sin(x)}{\cos^2(x)}\,\mathrm{d}x.$$

2 Intégration par parties

Exercice 7 (*)
Calculer

1. $\displaystyle\int_0^x t\,\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t$.
2. $\displaystyle\int_1^e t^2\ln(t)\,\mathrm{d}t$.
3. $\displaystyle\int_0^1 \arctan(t)\,\mathrm{d}t$.
4. $\displaystyle\int_0^\pi t\cos t\,\mathrm{d}t$.

Exercice 8 (**)

1. Calculer la dérivée de $t \mapsto \dfrac{1}{\tan(t)}$.
2. En déduire, grâce à une intégration par parties une primitive de
$$t \mapsto \frac{t}{\sin^2(t)}.$$

3 Changement de variable

Exercice 9 (*)
En s'aidant à chaque fois d'un changement de variable, calculer les intégrales suivantes.

1. $\displaystyle\int_e^x \frac{\ln(\ln t)}{t}\,\mathrm{d}t$
2. $\displaystyle\int_0^x \mathrm{e}^{2t}\cos\left(\mathrm{e}^t\right)\,\mathrm{d}t$.

Exercice 10 (**)
Calculer

1. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^4(t)\,\mathrm{d}t$ en posant $u = \tan(t)$.
2. $\displaystyle\int_{\mathrm{e}}^x \frac{\ln(t)\,\mathrm{d}t}{t + t\left(\ln(t)\right)^2}$ en posant $u = \ln(t)$.
3. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{1+\sin(t)}\,\mathrm{d}t$ avec $u(t) = \sin(t)$.

4 Fonctions circulaires

Exercice 11 (**)
Calculer

1. $\displaystyle\int_0^x \cos^3(t)\sin^2(t)\,\mathrm{d}t.$
2. $\displaystyle\int_0^x \cos^3(t)\sin(t)\,\mathrm{d}t.$
3. $\displaystyle\int_0^x \cos^3(t)\sin^4(2t)\,\mathrm{d}t.$

5 Synthèse

Exercice 12 (**)
Calculer

1. $\displaystyle\int_0^1 t\arctan(t)\,\mathrm{d}t.$
2. $\displaystyle\int_0^1 \mathrm{e}^t\cos(t)\,\mathrm{d}t$

Exercice 13 (**)
En s'aidant d'une formule de récurrence, calculer

$$u_n = \int x^n\,\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x \qquad \text{où } n\in\mathbf{N}.$$

Exercice 14 (***) (Intégrales de Wallis)
Pour tout $n\in\mathbf{N}$, on note $I_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(t)\,\mathrm{d}t.$

1. À l'aide de l'intégration par parties, trouver une relation entre I_n et I_{n+2}.
2. Exprimer I_n en fonction de n en distinguant les cas n pair et n impair.
3. Pour tout $n\in\mathbf{N}$, on note $J_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(t)\ \mathrm{d}t.$
   À l'aide d'un changement de variable, montrer que $I_n = J_n$ pour tout $n\in\mathbf{N}$.

Exercice 15 (***)

$$S = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(t)}{\sin(t)+\cos(t)}\ \mathrm{d}t \quad \text{et} \quad C = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(t)}{\sin(t)+\cos(t)}\ \mathrm{d}t$$

1. Montrer que $C = S$ grâce à un changement de variables.
2. Que vaut $C+S$. En déduire les valeurs de C et de S.
3. En déduire $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{t+\sqrt{1-t^2}}.$

Exercice 16 (***)
Calculer

$$\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \tan\left(\frac{u}{2}\right)\ln\left(1+\cos(u)\right)\ \mathrm{d}u$$

On pourra poser $t = \tan\left(\frac{u}{2}\right)$.