CALCUL APPROCHÉ D'UNE PROBABILITÉ

1 ALGORITHMES DE RÉFÉRENCE

EXERCICE 1 (Situation concrète)

Un expérience consiste à lancer un dé équilibré à 6 faces. On note A l'événement « la face obtenue est 3 ou 5 ».

Notre intuition consiste à penser que si on réalise l'expérience suffisamment de fois, alors la fréquence de réalisation de A tendra vers sa probabilité. C'est ce que l'on appelle la loi des grands nombres.

1) Créer une fonction Python **lancer()** qui simule le lancer de dé (et renvoie donc une valeur entre 1 et 6, prise de façon équiprobable).

2) Créer une fonction **experience()** qui renvoie si l'événement A est vérifié lors d'un lancer de dé (renvoie **True** ou **False**).

3) Créer une fonction **approx**(`n`) qui réalise `n` fois l'expérience, et qui compte, parmi ces `n` expériences, la proportion pour lesquelles A était réalisé.

Vérifier numériquement que la valeur obtenue s'approche de la probabilité $\mathbf{P}(A)$ lorsque n devient grand.

4) Modifier la fonction pour qu'elle trace le graphe des points (i, f_i) avec $i \in [\![1, n]\!]$ et f_i la proportion des expériences qui réalisent A parmi les i premières.

EXERCICE 2 (Cas abstrait)

Soit A un événement qui a une probabilité $p = \mathbf{P}(A) \in [0, 1]$ de se produire.

1) Créer une fonction **experience**(`p`) qui simule l'expérience : elle renvoie **True** avec la probabilité p, et **False** avec la probabilité $1 - p$.

2) Programmer une fonction qui réalise de nombreuses fois cette expérience et qui trace le graphe des fréquences (proportion de fois où A est réalisé) en fonction du nombre d'expériences réalisées.
Vérifier que la fréquence tend vers p quand n devient assez grand.

2 APPLICATION AUX EXERCICES

EXERCICE 3

On lance k dés simultanément. Faire un yam's consiste à avoir la même valeur sur les k dés.

1) **(a)** Simuler informatiquement l'expérience qui consiste à lancer k dés équilibrés et à vérifier si on obtient un yam's.
La fonction renvoie donc **True** ou **False** en fonction de l'obtention ou non du yam's.

(b) Tracer le graphe des probabilités et vérifier que l'on obtient une valeur proche de celle théorique pour un nombre suffisamment grand d'expériences.

2) On lance n fois de suite les k dés et on cherche à savoir à partir de quelle valeur de n_0, la probabilité d'obtenir un yam's devient supérieure à $\frac{1}{2}$.

(a) Programmer une fonction **multipleLancers**(`n,k`) qui renvoie **True** si on obtient au moins un yam parmi les n lancers des k dés, et **False** sinon.

(b) Trouver informatiquement la valeur de n_0 pour $k = 2$, et pour $k = 3$.

EXERCICE 4

Un fumeur cherche à arrêter de fumer chaque jour. On note p_n la probabilité qu'il fume le n-ième jour.

- S'il a réussi à ne pas fumer un jour, il ne fume pas le lendemain avec une probabilité $\frac{1}{2}$.
- S'il fume un jour, il ne fume pas le lendemain avec une probabilité $\frac{1}{4}$.

On suppose qu'il ne fume pas le premier jour.

1) Créer une fonction **demain**(`fume`) qui renvoie s'il fume le lendemain selon s'il a fumé ou non le jour en question.

2) Créer une fonction **jour(n)** qui renvoie s'il fume ou non le jour n.

3) En déduire une méthode pour obtenir une estimation numérique de la probabilité qu'il fume le jour n.

4) Tracer dans un graphique, la probabilité (approchée) qu'il fume le jour n en fonction de n.

3 CAS DES PROBABILITÉS CONDITIONNELLES

Idée de base : pour estimer la probabilité $\mathbf{P}_A(B)$, on calcule, parmi tous les tirages qui vérifient B, la proportion de ceux qui vérifient également A.

$$\frac{\text{nombre de tirages qui vérifient } A \text{ et } B}{\text{nombre de tirages qui vérifient } A}.$$

Bien sûr, cela suppose que la probabilité de A soit non nulle pour que l'on ait des tirages qui vérifient A et que le quotient soit possible.

EXERCICE 5

On lance un dé et on obtient une valeur entre 1 et 6 (de façon équiprobable).

On définit deux événements :

- A le résultat est pair.
- B le résultat est 6.

Programmer un algorithme qui réalise de nombreux lancers et donne une valeur approchée de $\mathbf{P}_A(B)$. Vérifier que la valeur approchée tend vers la valeur théorique pour suffisamment de lancers.

4 MODÉLISATION D'ÉVÉNEMENTS NON ÉQUIPROBABLES

EXERCICE 6

1) Modéliser un dé qui donne 6 une fois sur 2 et chacune des autres faces avec la probabilité $\frac{1}{10}$.

2) Vérifier en lançant le dé suffisamment de fois, qu'on retrouve que la probabilité d'obtenir 6 est $\frac{1}{2}$ et que celle d'obtenir un 4 est $\frac{1}{10}$.