Probabilités sur un univers fini

Les applications numériques peuvent se faire à la calculatrice.

Exercice 1 (Pour commencer)
Soit $\Omega = \{1, 2, \cdots, n\}$,

1. Déterminer une probabilité $\mathbf{P}$ sur Ω, tel que, pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $\mathbf{P}(\{k\})$ soit proportionnel à k.
2. Déterminer une probabilité $\mathbf{P}$ sur Ω, tel que, pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $\mathbf{P}(\{1, 2, \cdots, k\})$ soit proportionnel à k^2.
3. Déterminer une probabilité $\mathbf{P}$ sur Ω, tel que, pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $\mathbf{P}(\{k\})$ soit proportionnel à k^2.

Exercice 2 (**)
Exercice avec dénombrement...
Un jeu de cartes est truqué : on a remplacé dans ce jeu, une carte autre que l'as de pique par un second as de pique.
On tire simultanément 4 cartes.

1. Quelle est la probabilité de déceler la supercherie ?
2. On recommence n fois l'expérience (en remettant à chaque fois les 4 cartes dans le jeu). Quel est le nombre minimum d'expériences à réaliser pour découvrir la supercherie avec une probabilité supérieure à 0,95.

1 Événements indépendants

Exercice 3 (*)
On lance un dé à six faces parfaitement équilibré. Les événements suivants sont-ils indépendants ?

A : « on obtient le tirage 2, 4 ou 6 »
B : « on obtient le tirage 3 ou 6 »

Exercice 4 (**)
Montrer qu'un événement A est indépendant de tout autre événement si et seulement si $\mathbf{P}(A) = 0$ ou 1.

2 Probabilités conditionnelles

Exercice 5 (**)
Soient A et B deux événements avec $\mathbf{P}(A) > 0$. Comparer les probabilités conditionnelles

$$\mathbf{P}_{A\cup B}(A \cap B) \text{ et } \mathbf{P}_A(A \cap B)$$

Exercice 6 (*) (Trois urnes)
Nous disposons de trois urnes :
L'urne A contient 2 boules blanches et 4 rouges.
L'urne B contient 8 boules blanches et 4 rouges.
L'urne C contient 1 boule blanche et 3 rouges.
On tire une boule de chaque urne.
Quelle est la probabilité que la boule tirée de A soit blanche si on sait que le tirage a donné exactement deux boules blanches ?

Exercice 7 (*)
Albane gratte des allumettes les unes après les autres. Pour chaque allumette, elle a la probabilité p de réussir à l'allumer. Chaque essai est supposé indépendant des précédents.

1. Quelle est la probabilité que la première allumette qu'elle parvienne à allumer soit la n-ième exactement.
2. Elle dispose de n allumettes au total dans la boîte. Quelle est la probabilité qu'elle arrive à en allumer au moins une ?

Exercice 8 (*)
On classe des gérants de portefeuille en deux catégories : les bien informés et les autres. Lorsqu'un gérant bien informé conseille son client sur une valeur boursière, la probabilité que le cours de cette action suive ses prédictions est de 0,8. Si le gérant est mal informé, la probabilité que le cours ne suive pas ses prédictions est 0,6.
On sait par ailleurs que si l'on choisit au hasard un gérant de portefeuille, il y a une chance sur 10 pour que celui ci soit un gérant bien informé.
Un client choisit au hasard un gérant et lui propose une position sur une valeur.

1. Sachant que le cours de cette valeur suivi les prédictions du gérant, quelle est la probabilité pour que ce gérant soit mal informé ?
2. Le gérant informe le client dix fois sur des valeurs, et ses informations se sont révélées justes les dix fois.
Il propose à présent une position sur une nouvelle valeur. Quelle est la probabilité qu'il ait raison.

Exercice 9 (*) (Bluff ?)
Vous jouez au poker. C'est le dernier tour de mise, il ne reste plus que Jérémie en face de vous. Il y a 540 dans le pot et Jérémie relance encore 200 par dessus. Vous hésitez à le suivre.
Vous savez que la probabilité qu'il bluffe est de 25%. Lorsqu'il bluffe , il relance 9 fois sur 10, par contre, lorsqu'il ne bluffe pas, il ne relance que 6 fois sur 10.

1. Quelle est la probabilité qu'il bluffe ?
2. (*Utiliser le cours de terminale*) Avez-vous intérêt à le suivre (sachant que vous gagnez s'il bluffe, mais que vous perdez sinon) ?

Exercice 10 (**)
Un livre contient 4 erreurs, numérotées de 1 à 4, et est relu par une suite de lecteurs pour correction. À chaque relecture, chaque erreur est corrigée avec une probabilité $1/3$.
Les erreurs sont corrigées de manière indépendante les unes des autres, et les relectures sont indépendantes les unes des autres.

1. Quelle est la probabilité que l'erreur numéro 1 ne soit pas corrigée à l'issue de la n-ième lecture ?

2. Quelle est la probabilité que le livre soit entièrement corrigé à l'issue de la n-ième lecture ? Combien faut-il de relectures pour que cette probabilité soit supérieure à 0.9 ?

Exercice 11 (**) (Le caméléon)
Un caméléon daltonien posé sur du vert prend soit la couleur verte, soit la couleur rouge, avec la même probabilité. Quand il est posé sur du rouge, il prend soit la couleur verte une fois sur cinq, soit la couleur rouge quatre fois sur cinq.
Julie étale chaque matin sa couverture bicolore sur l'herbe, une fois sur trois côté rouge visible, deux fois sur trois côté vert visible.
Un couple de caméléon daltoniens vient s'ébattre sur sa couverture.

1. Calculer la probabilité qu'ils soient de la même couleur.

2. Les événements « le caméléon mâle est vert » et « le caméléon femelle est vert » sont-ils indépendants ?

3. Sachant qu'ils sont de couleurs différente, calculer la probabilité que la face apparente de la couverture soit rouge.

Exercice 12 (***)
On a placé des boules blanches et des boules noires dans une urne (avec la même probabilité pour chaque couleur). L'urne contient trois boules.
On effectue des tirages avec remise et on note à chaque fois la couleur de la boule tirée.
On obtient les tirages suivants :

$$BBNBB$$

Quelle est la probabilité que l'on tire une boule noire au tirage suivant.

Exercice 13 (***)
On considère N coffres. Avec une probabilité p un trésor à été placé dans l'un de ces coffres, chaque coffre pouvant être choisi de façon équiprobable. On a ouvert $N-1$ coffres sans trouver le trésor. Quelle est la probabilité pour qu'il figure dans le dernier coffre ?

3 Chaîne de Markov

Exercice 14 (**)
Un fumeur cherche à arrêter de fumer chaque jour. On note p_n la probabilité qu'il fume le n-ième jour.

- S'il a réussi à ne pas fumer un jour, il ne fume pas le lendemain avec une probabilité $\frac{1}{2}$.

- S'il fume un jour, il ne fume pas le lendemain avec une probabilité $\frac{1}{4}$.

1. Calculer p_{n+1} en fonction de p_n.

2. Calculer p_n en fonction de p_1 et de n.

3. Donner $\lim\limits_{n\to+\infty} p_n$.

4 Casse-tête

Exercice 15 (*)
Une famille a deux enfants.

1. Quelle est la probabilité que les deux soient des garçons ?

2. Quelle est cette probabilité sachant que l'aîné est un garçon ?

3. On sait que l'un des deux enfants est un garçon, quelle est la probabilité que l'autre le soit aussi ?

4. (***) On sait que l'un des deux enfants est un garçon et né un 29 février, quelle est la probabilité que l'autre soit un garçon ?

Exercice 16 (***) (Le jeu des trois portes)
Dans le jeu « Let's make a deal », trois portes A,B, C sont fermées. Derrière l'une d'elles se trouve une Ferrari, derrière les autres, une chèvre.

- le joueur choisit une porte, disons A

- Le présentateur sait où se trouve la voiture, et l'informe qu'elle n'est pas derrière la porte B puis il lui offre la possibilité de réviser son choix.

Le joueur a-t-il intérêt à réviser son choix ?
On suppose que le joueur est davantage attiré par la Ferrari que par la chèvre.
Indication de dernier recours[1]

1. Une fois que la porte A a été choisie, poser A: « la Ferrari est derrière la porte A » ; de même pour B et C. Poser I : « le présentateur indique qu'elle n'est pas derrière la porte B ».