Les nombres réels

D'autres exercices sur les inégalités se trouvent dans la partie soutien du site, ne pas hésiter à s'y référer.

1 Résolution d'équations et inéquations

Exercice 1 (*)
Résoudre et représenter graphiquement les solutions des inégalités suivantes :

1. $(x-2)(x-1)<0$
2. $\dfrac{x+3}{x-5}<0$
3. $\dfrac{x+3}{x-5}<1$
4. $x<\dfrac{1}{x}$

Exercice 2 (*)
Résoudre les inégalités suivantes :

1. $-x^3+2x^2 \geqslant 0$
2. $2x^2-4x-6 \geqslant 0$
3. $x^3+5x^2+8x+6<2$
4. $x^3+x^2-5x-5 \leqslant 0$

Exercice 3 (*)
Résoudre les inégalités suivantes :

1. $|x-5|<2$
2. $|x+1|>3$
3. $\dfrac{1+x}{1-x}<|x-1|$

Exercice 4 (**)
Résoudre les égalités suivantes :

1. $x|x|=3x+2$
2. $|x+2|+|3x-1|=4$
3. $|x^2+x-3|=|x|$
4. $x+|x|=\dfrac{2}{x}$

Exercice 5 (*)

1. Montrer que pour tout $x>-1$, $\ln(1+x) \leqslant x$.
2. En déduire que pour tout $x>0$,
$$0 \leqslant \ln\left(\frac{x+1}{x}\right) \leqslant \frac{1}{x}.$$

Exercice 6 (**)
Résoudre les égalités suivantes :

1. $\ln((x+2)(x-1))=\ln 2$.
2. $x+\sqrt{2x+1}=1$.

2 Majorants-minorants

Exercice 7 (*)

1. La fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ est-elle majorée sur $\mathbf{R}_+^*$, est-elle minorée sur ce même intervalle ?
2. Donner sa borne inférieure en justifiant. Est-ce un minimum ?

Exercice 8 (*)
$$E=\{1-(-1)^n,\ n \in \mathbf{N}\}.$$

1. L'ensemble est-il majoré ? minoré ?
2. S'il est majoré, donner sa borne supérieure, est-ce un maximum ?
3. S'il est minoré, donner sa borne inférieure, est-ce un minimum ?

Exercice 9 (**)
$$E=\left\{\frac{2n-1}{n},\ n \in \mathbf{N}^*\right\}.$$

1. L'ensemble est-il majoré ? minoré ?
2. S'il est majoré, donner sa borne supérieure, est-ce un maximum ?
3. S'il est minoré, donner sa borne inférieure, est-ce un minimum ?

Exercice 10
On considère les fonctions a et b définies sur $\mathbf{R}$ par:
$$a(x)=\left\{\begin{array}{ll} 2-x & \text{si } x \geqslant 3 \\ x^2 & \text{si } x<3 \end{array}\right. .$$
$$b(x)=\left\{\begin{array}{ll} 1+1/x & \text{si } x>0 \\ \sqrt{(-x)} & \text{si } x \leqslant 0 \end{array}\right. .$$

1. Les fonctions sont-elles majorées ? minorées ?
2. Si elles sont majorées, donner leur borne supérieure, est-ce un maximum ?
3. Si elles sont minorées, donner leur borne inférieure, est-ce un minimum ?

Exercice 11 (**)
On définit la suite (u_n) par $u_0=1$ et
$$\forall n \in \mathbf{N},\ 3u_{n+1}+2u_n+1=0.$$

1. Montrer qu'il existe $\lambda \in \mathbf{R}$ que l'on déterminera tel que
$$\forall n \in \mathbf{N},\ u_n=\left(-\frac{2}{3}\right)^n \lambda-\frac{1}{5}$$
2. Pour tout entier n, trouver l'expression de u_n en fonction de u_0 et de n.
3. Donner $\sup\{u_n,\ n \in \mathbf{N}\}$. Justifier
4. Donner $\inf\{u_n,\ n \in \mathbf{N}\}$. Justifier

Exercice 12 (***)
Soient A et B deux parties non vides majorées de $\mathbf{R}$ telles que $A \subset B$.
Montrer que $\sup A \leqslant \sup B$.

3 Partie entière

Exercice 13 (**)
Démontrer que $\forall (x, y) \in \mathbf{R}^2$,

$$\lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor \leqslant \lfloor x + y \rfloor \leqslant \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + 1.$$

Exercice 14 (**)
Démontrer que $\forall x \in \mathbf{R}$, $\forall n \in \mathbf{N}^*$,

$$\left\lfloor \frac{1}{n} \lfloor nx \rfloor \right\rfloor = \lfloor x \rfloor.$$

4 Inégalités plus sophistiquées

Exercice 15 (*)
Démontrer que pour tout $(x, y) \in \mathbf{R}^2$,

$$\min(x, y) = \frac{(x + y) - |x - y|}{2},$$

$$\max(x, y) = \frac{(x + y) + |x - y|}{2}.$$

Exercice 16 (**)

1. Résoudre dans $\mathbf{R}$, l'inéquation suivante :
$$x^2 - x - 1 \geqslant 0.$$
2. Résoudre dans $\mathbf{R}$, la chaîne d'inéquations suivantes :
$$1 + x - x^2 \leqslant x^2 - 3x + 1 \leqslant x^2 - x - 1.$$
3. Résoudre dans $\mathbf{R}$, l'inéquation :
$$|x^2 - 3x - 1| \leqslant x^2 - x - 1.$$

Exercice 17 (**)
Soient $(a, b) \in \mathbf{R}_+^2$, non tous nuls.
Montrer que
$$\frac{2ab}{a + b} \leqslant \sqrt{ab} \leqslant \frac{a + b}{2}.$$
Vocabulaire :
$\frac{a+b}{2}$ est la moyenne arithmétique,
$\sqrt{ab}$ est la moyenne géométrique,
$\frac{2ab}{a+b}$ est la moyenne harmonique.

Exercice 18 (**)
On définit f sur $\mathbf{R}_+$ par

$$f : x \mapsto \sup_{n \in \mathbb{N}} \frac{x^n}{n!}.$$

Montrer que f est bien définie sur $\mathbf{R}_+$ et donner son expression sans utiliser les bornes supérieures (ou inférieures).

Exercice 19 (**)

1. Soient $(x, y) \in \mathbf{R}^2$, montrer que $(x + y)^2 \geqslant 4xy$.
2. En déduire que
$$\forall (a, b, c) \in (\mathbf{R}_+)^3,\ (a + b)(b + c)(c + a) \geqslant 8abc.$$

Exercice 20 (***)
Montrer que pour tout $n \geqslant 3$,

$$\sqrt{n} < \sqrt[n]{n!}.$$

Exercice 21 (**)

1. (*) Montrer que $\forall x \in [0, 1]$, $0 \leqslant x(1 - x) \leqslant \frac{1}{4}$.
Retenir cette inégalité.
2. En déduire que $\forall (a, b, c) \in [0, 1]^3$,
$$\min \left(a(1 - b), b(1 - c), c(1 - a)\right) \leqslant \frac{1}{4}.$$

Exercice 22 (***) (Min-max ou max-min ?)

1. Soient $(n, p) \in (\mathbf{N}^*)^2$,
$\forall i \in [\![1, n]\!], \forall j \in [\![1, p]\!]$, on définit $a_{i,j} \in \mathbf{R}$.
Démontrer que
$$\min_{1 \leqslant i \leqslant n} \left(\max_{1 \leqslant j \leqslant p} a_{i,j} \right) \geqslant \max_{1 \leqslant j \leqslant p} \left(\min_{1 \leqslant i \leqslant n} a_{i,j} \right).$$
2. (*Lewis Carroll*) Soient 200 hussard rangés en 10 lignes et 20 colonnes.
Dans chaque ligne, on prend le plus grand puis on retient le plus petit de tous ceux retenus : X
Dans chaque colonne, on prend le plus petit, puis on retient le plus grand ce ceux-ci : Y.
Qui est le plus grand ? X ou Y ?

Exercice 23 (***)
Soient A et B deux parties non vides majorée de $\mathbf{R}$, non disjointes.

1. Montrer que $\sup A \cap B \leqslant \min \left(\sup A, \sup B\right)$.
2. A-t-on l'égalité dans le cas général ?
3. (****) Qu'en est-il si A et B sont des intervalles ?