Python : Préparation aux oraux du concours – probabilités

Chaque exercice nécessite une préparation de 30 minutes et doit pouvoir ensuite être présenté lors d'un oral de 20 minutes.

Exercice 1

Soit $n \in \mathbf{N}^*$. On effectue n tirages successifs, avec remise, d'une boule dans une urne contenant deux boules rouges et trois boules noires. On note X_n le nombre de boules rouges obtenues.

1) (a) Écrire un programme Python qui simule cette expérience aléatoire, et renvoie la valeur de X_n.

   (b) Écrire un programme Python qui simule cette expérience aléatoire m fois ($m \in \mathbf{N}^*$) et renvoie une valeur approchée de $\mathbf{P}(0,35 \leqslant \frac{X_n}{n} \leqslant 0,45)$.

   (c) À l'aide d'un ou plusieurs programmes Python, réaliser une conjecture portant sur le nombre de tirages minimal à réaliser pour garantir à 95% que la proportion de boules rouges obtenues est comprise entre $0,35$ et $0,45$.

2) (a) Déterminer la loi de X_n, son espérance et sa variance.

   (b) Déterminer, $\forall a > 0$, un majorant de $\mathbf{P}(|X_n - \mathbf{E}(X_n)| \geqslant a)$.

   (c) En déduire une valeur de n à partir de laquelle la probabilité que la proportion de boules rouges obtenues soit comprise entre $0,35$ et $0,45$ est supérieure à $0,95$.

3) Commenter

Exercice 2 (Suites d'urnes modifiées)

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 1. On dispose de n sacs de jetons $S_1, S_2, \ldots, S_n$. Le sac S_1 contient 2 jetons noirs et 1 jeton blanc, et les autres sacs contiennent 1 jeton noir et 1 jeton blanc. On tire au hasard un jeton de S_1 que l'on place dans S_2, puis un jeton de S_2 que l'on place dans S_3, et ainsi de suite, jusqu'à tirer au hasard un jeton de S_{n-1} que l'on place dans S_n. On tire alors au hasard un jeton de S_n.

On note E_n « le jeton tiré de S_n est blanc » et $p_n = \mathbf{P}(E_n)$.

1) (a) Écrire une fonction Python, prenant en paramètre la couleur du jeton tiré d'un certain sac S_k ($k \in \mathbf{N}^*$), et renvoyant la couleur du jeton tiré de S_{k+1}.

   (b) Écrire une fonction Python permettant de simuler l'expérience décrite dans l'énoncé et retournant une variable indiquant la couleur du jeton tiré de S_n.

   (c) Écrire une fonction Python simulant m expériences (avec $m \in \mathbf{N}^*$) et retournant une estimation de la probabilité p_n.

   (d) Émettre une conjecture relativement à la nature et la limite éventuelle de la suite (p_n).

2) (a) Exprimer, pour tout $k \in \mathbf{N}^*$, p_{k+1} en fonction de p_k.

   (b) En déduire une expression explicite, pour tout $k \in \mathbf{N}^*$, de p_k en fonction de k.

   (c) Déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} p_n$.