

## PYTHON : PRÉPARATION AUX ORAUX DU CONCOURS – PROBABILITÉS-2

Chaque exercice nécessite une préparation de 30 minutes et doit pouvoir ensuite être présenté lors d'un oral de 20 minutes.

### Exercice 1

Soit  $n \in \mathbf{N}^*$ . On effectue  $n$  tirages successifs, avec remise, d'une boule dans une urne contenant deux boules rouges et trois boules noires. On note  $X_n$  le nombre de boules rouges obtenues.

- 1) (a) Écrire un programme Python qui simule cette expérience aléatoire, et renvoie la valeur de  $X_n$ .
- (b) Écrire un programme Python qui simule cette expérience aléatoire  $m$  fois ( $m \in \mathbf{N}^*$ ) et renvoie une valeur approchée de  $\mathbf{P}(0,35 \leq \frac{X_n}{n} \leq 0,45)$ .
- (c) À l'aide d'un ou plusieurs programmes Python, réaliser une conjecture portant sur le nombre de tirages minimal à réaliser pour garantir à 95% que la proportion de boules rouges obtenues est comprise entre 0,35 et 0,45.
- 2) (a) Déterminer la loi de  $X_n$ , son espérance et sa variance.
- (b) Déterminer,  $\forall a > 0$ , un majorant de  $\mathbf{P}(|X_n - \mathbf{E}(X_n)| \geq a)$ .
- (c) En déduire une valeur de  $n$  à partir de laquelle la probabilité que la proportion de boules rouges obtenues soit comprise entre 0,35 et 0,45 est supérieure à 0,95.
- 3) Commenter

### Exercice 2 (Nombres de tirages différents)

Un professeur interroge ses étudiants au hasard. À chaque nouvelle question, il interroge un étudiant, indépendamment de ceux qu'il a interrogé précédemment. Il peut donc être amené à interroger plusieurs fois le même étudiant.

On suppose que la classe est composée de  $N$  étudiants. On note  $T_n$  le nombre d'étudiants différents qui ont été interrogés lors des  $n$  premières questions.

- 1) Donner les valeurs prises par  $T_n$  en fonction de  $n$  et de  $N$ .
- 2) (a) Programmer une fonction Python qui prend en argument  $N$  et  $n$  et qui renvoie la valeur de  $T_n$ .  
On pourra utiliser la fonction `randrange(N)` qui renvoie un entier au hasard pris dans  $\llbracket 0, N - 1 \rrbracket$  et modéliser les étudiants par une liste à  $N$  éléments.
- (b) Programmer une fonction qui renvoie une valeur approchée de l'espérance  $\mathbf{E}(T_n)$  en fonction de  $N$  et  $n$ .
- 3) Exprimer la loi de probabilité de la variable  $T_{n+1} - T_n$  en fonction de  $\mathbf{E}(T_n)$ .
- 4) En déduire que  $\mathbf{E}(T_{n+1}) = \frac{N-1}{N} \mathbf{E}(T_n) + 1$ .
- 5) Donner l'expression de  $\mathbf{E}(T_n)$  en fonction de  $N$  et de  $n$ , puis déterminer  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbf{E}(T_n)$ .
- 6) (a) Avec Python, tracer la courbe  $\mathbf{E}(T_n)$  en fonction de  $n$  (pour  $N$  fixé) à partir de la modélisation réalisée en question 2.b).
- (b) Superposer cette courbe avec celle obtenue par la question 5) pour s'assurer de la cohérence des résultats.