Python : Préparation aux oraux du concours – analyse-1

Exercice 1
On considère sur $\mathbf{R}_+^*$ la fonction

$$f\ :\ x \mapsto \ln x + x$$

1) Montrer que pour tout $p \in \mathbf{N}^*$, l'équation $f(x) = p$ admet une unique solution et que celle-ci appartient au segment $[1, p]$.

   On note x_p cette solution.

2) (a) Construire avec Python la suite $(x_p)_{p\geqslant 1}$. (avec des valeurs approchées).
   (b) Conjecturer l'éventuelle monotonie de (x_p) et son éventuelle convergence ou divergence.
   (c) Essayer, par "tâtonnements numériques" de conjecturer un équivalent de la suite en $+\infty$.

3) Démontrer mathématiquement les résultats précédents.

Exercice 2
On considère la fonction définie sur $[0, 1]$ par $f(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x}{x + 10}$.

1) (a) Étudier les variations de la fonction f.
   (b) Démontrer que l'équation $f(x) = x$ admet une solution unique dans $[0, 1]$, qui sera notée α.
   (c) Montrer que $f(x) - x \geqslant 0$ sur $[0, \alpha]$

2) On considère la suite définie par $u_0 = 0$ et $\forall n \in \mathbf{N},\ u_{n+1} = f(u_n)$.
   (a) Programmer une fonction en Python qui calcule le terme n de la suite (u_n).
   (b) En déduire une conjecture sur le sens de variation de la suite et sur sa nature.

3) (a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leqslant u_n \leqslant \alpha$
   (b) Montrer que la suite converge vers une limite que l'on précisera.

4) Etudier la suite définie par $v_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbf{N},\ v_{n+1} = f(v_n)$

5) Proposer un encadrement numérique de α à 10^{-5} près.