

## SÉRIES NUMÉRIQUES

## 1 CALCULS À LA PELLE

**Exercice 1** (\* → \*\*)

Donner la nature de la série de terme général

1)  $\ln\left(\frac{n^2 + n + 1}{n^2 + n - 1}\right)$ .

2)  $\frac{1}{n + (-1)^n \sqrt{n}}$ .

3)  $n^{-\ln(\ln n)}$ .

4)  $\left(\frac{n}{n+1}\right)^n$ .

5)  $\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$ .

6)  $\frac{1}{1^2 + 2^2 + \dots + n^2}$ .

7)  $\left(\frac{1}{2}\right)^{\sqrt{n}}$ .

8)  $\cos\left(\frac{1}{n}\right) - 1$ .

**Exercice 2** (\*\*)

Donner la nature de la série de terme général

1)  $\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^n$ .

3)  $\left(\frac{1}{2} + \frac{2i}{3}\right)^n$ .

2)  $\frac{\ln(n)}{n!}$ .

4)  $\sin(n)$ .

**Exercice 3** (\*)

Montrer l'existence et calculer  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$ .

**Exercice 4** (\*\*) (une méthode à connaître)

À l'aide de la comparaison série intégrale, donner un équivalent en  $+\infty$  de

1)  $\sum_{k=1}^n k^3$ .

2)  $\sum_{k=2}^n \frac{1}{k \ln k}$ .

**Exercice 5** (Série harmonique)

On pose  $(H_n)$  la suite des sommes partielles associée à la série  $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n}$ .

1) À l'aide d'une comparaison série-intégrale, montrer que  $H_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \ln(n)$ .

2) Pour tout  $n \in \mathbf{N}^*$ , on pose  $u_n = H_n - \ln(n)$ . Montrer que  $u_{n+1} - u_n = O\left(\frac{1}{n^2}\right)$ .

3) En déduire qu'il existe  $\gamma \in \mathbf{R}$  tel que  $H_n = \ln(n) + \gamma + o(1)$ .

## 2 EXERCICES THÉORIQUES

**Exercice 6** (\*)

Montrer que si  $\sum (u_n + v_n)$  converge, alors  $\sum u_n$  et  $\sum v_n$  sont de même nature.

**Exercice 7** (\*)

Soit  $(u_n)_{n \in \mathbf{N}} \in \mathbf{Z}^{\mathbf{N}}$ . Donner une condition nécessaire et suffisante sur  $u$  pour que  $\sum u_k$  converge.

**Exercice 8** (\*)

Soit  $(u_n)$  une suite réelle strictement positive.

Montrer que la série  $\sum \ln\left(\frac{u_{k+1}}{u_k}\right)$  converge si et seulement si la suite  $(u_n)$  converge vers une limite strictement positive.

**Exercice 9** (\*)

Donner un exemple d'une suite  $(u_n)$  positive non monotone telle que  $\sum u_n$  converge.

**Exercice 10** (\*\*)

Montrer que si  $\sum u_n$  est absolument convergente, alors  $\sum u_n^2$  aussi.

**Exercice 11** (\*\*)

Soient  $(a_n)$  et  $(b_n)$  deux suites positives.

1) On suppose que  $a_n = o(b_n)$ .

(a) Si  $\sum b_n$  converge, montrer que  $\sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k = o\left(\sum_{k=n+1}^{+\infty} b_k\right)$ .

(b) Si  $\sum b_n$  diverge, montrer que  $\sum_{k=1}^n a_k = o\left(\sum_{k=1}^n b_k\right)$ .

2) Faire de même pour les suites équivalentes.

**Exercice 12** (\*\*\*)

Soit  $u$  une suite strictement positive. Pour tout  $n \in \mathbf{N}$ , on pose  $a_n = \frac{u_{n+1}}{u_n}$ .

Montrer que si  $(a_n)$  bornée, alors il existe  $s = \sup\{\text{valeurs d'adhérence de } a\}$  dans  $\mathbf{R}_+$ .

Montrer alors que pour  $s \in [0, 1[$ ,  $\sum u_n$  converge.

## 3 AUTOUR DES SÉRIES ALTERNÉES

## Exercice 13 (\*\*)

On propose de calculer explicitement  $S = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ .

Pour tout  $x \in [0, 1]$ , pour tout  $N \in \mathbf{N}$ , on pose  $S_N(x) = \sum_{n=1}^N \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n$ .

- 1) Justifier que  $S$  est bien défini.
- 2) Déterminer une expression simple de  $S_N$  en fonction d'une intégrale.
- 3) En déduire  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ .  
On évitera de passer à la limite « sous l'intégrale ».

## Exercice 14 (\*\*)

Suite de l'exercice précédent : une autre méthode.

Pour tout  $N \in \mathbf{N}$ , on pose  $S_N = \sum_{n=1}^N \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ .

On rappelle que  $(S_N)$  est convergente (exercice précédent).

On rappelle également le résultat prouvé avec les suites :

$$H_N = \sum_{n=1}^N \frac{1}{n} = \ln(N) + \gamma + o(1)$$

avec  $\gamma \in \mathbf{R}$ , la constante d'Euler.

- 1) Exprimer  $S_{2N}$  en fonction de  $H_N$  et  $H_{2N}$ .
- 2) En déduire la limite de  $S_N$  quand  $N$  tend vers  $+\infty$ .

On a encore une autre méthode avec le chapitre d'intégration.

## Exercice 15 (\*\*\*)

Pour tout  $n \geq 1$ , on pose  $u_n = \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ .

On définit  $\varphi$  sur  $\mathbf{N}^*$  par

$$\forall n \in \mathbf{N}^*, \varphi(3n-2) = 2n-1, \varphi(3n-1) = 4n-2 \text{ et } \varphi(3n) = 4n.$$

- 1) Montrer que  $\varphi$  est une permutation de  $\mathbf{N}^*$ .
- 2) Justifier l'existence de la somme et calculer  $\sum_{n=1}^{+\infty} u_{\varphi(n)}$ .

## 4 FAMILLES SOMMABLES

## Exercice 16 (\*)

Soit  $q \in \mathbf{C}$  avec  $|q| < 1$ .

Montrer que la famille  $(q^{|n|})_{n \in \mathbf{Z}}$  est sommable et calculer sa somme.

## Exercice 17 (\*)

Calculer

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k!}.$$

## Exercice 18 (\*\*)

- 1) Soit  $p \geq 1$ , montrer que

$$\sum_{n=1, n \neq p}^{+\infty} \frac{1}{n^2 - p^2} = \frac{3}{4p^2}.$$

- 2) Calculer  $\sum_{p=1}^{+\infty} \sum_{n=1, n \neq p}^{+\infty} \frac{1}{n^2 - p^2}$  et comparer avec  $\sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{p=1, p \neq n}^{+\infty} \frac{1}{n^2 - p^2}$ .  
Que peut-on en déduire.

## Exercice 19 (\*\*)

Montrer que pour tout  $x \in ]-1, 1[$ ,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{1-x^n} = \sum_{n=1}^{+\infty} d(n)x^n$$

où  $d(n)$  désigne le nombre de diviseurs positifs de  $n$ .

## Exercice 20 (\*) (Mines)

Pour  $k \geq 2$ , on note  $\zeta(k) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^k}$ .

Étudier la convergence des séries  $\sum_{k \geq 2} (\zeta(k) - 1)$  et  $\sum_{k \geq 2} (-1)^k (\zeta(k) - 1)$  et calculer leur somme.

## 5 ENTRAÎNEMENT

**Exercice 21 (\*\*)** (Séries de Bertrand)

Soient  $\alpha$  et  $\beta$  deux réels. On appelle série de Bertrand, la série

$$\sum_{n \geq 2} \frac{1}{n^\alpha (\ln n)^\beta}.$$

Étudier la nature de cette série.

**Exercice 22 (\*\*\*)**

1) Soit  $u$  une suite réelle positive.

Montrer que si  $\left( \sum_{k=1}^{n^2-1} u_k \right)$  converge, alors la série  $\sum u_k$  converge.

2) S'il y a convergence, calculer

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\lfloor \sqrt{k+1} \rfloor - \lfloor \sqrt{k} \rfloor}{k}.$$

**Exercice 23 (\*\*\*)**

1) Soit  $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$  une suite réelle décroissante, positive.

On pose  $\forall n \in \mathbf{N}$ ,  $v_n = 2^n u_{2^n}$ .

Montrer que

$$\sum u_n \text{ converge si et seulement si } \sum v_n \text{ converge.}$$

2) Application : étudier la convergence des séries  $\sum \frac{1}{n \ln n}$  et  $\sum \frac{1}{n \ln n \ln(\ln n)}$ .

3) *Généralisation* : Soient  $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$  une suite réelle décroissante, positive et  $p \in \mathbf{N}$  tel que  $p \geq 2$ .

On pose  $\forall n \in \mathbf{N}$ ,  $v_n = p^n u_{p^n}$ .

Montrer que

$$\sum u_n \text{ converge si, et seulement si } \sum v_n \text{ converge.}$$

**Exercice 24 (\*\*\*)**

Soit  $f \in \mathcal{C}^1(\mathbf{R}, \mathbf{R}_+^*)$  telle que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f'(x)}{f(x)} = -\infty$ .

1) Montrer que la série de terme général  $f(n)$  converge.

2) Donner un équivalent du reste  $R_{n_0-1} = \sum_{k=n_0}^{+\infty} f(k)$ .

**Exercice 25 (\*\*\*)**

Soit  $(a_n)$  une suite bornée telle que

$$\forall p \geq 2, \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{n^p} = 0.$$

Montrer que  $(a_n)$  est la suite nulle.

**Exercice 26**

Soit  $\sigma$  une bijection de  $\mathbf{N}^*$  dans lui-même. Déterminer la nature de :

$$1) \quad (*) \quad \sum_{n \geq 1} \frac{1}{\sigma(n)^2}.$$

$$3) \quad (***) \quad \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n \sigma(n)}.$$

$$2) \quad (***) \quad \sum_{n \geq 1} \frac{1}{\sigma(n)}.$$

$$4) \quad (***) \quad \sum_{n \geq 1} \frac{\sigma(n)}{n^2}.$$

**Exercice 27 (\*\*\*)**

Soit  $\mathcal{P}$  l'ensemble des nombres premiers. On veut montrer que  $\sum_{p \in \mathcal{P}} \frac{1}{p}$  diverge.

Par l'absurde, on suppose qu'elle converge.

On écrit les nombres premiers par ordre croissant  $(p_i)_{i \in \mathbf{N}}$ .

1) Montrer qu'il existe  $k \in \mathbf{N}$ , tel que

$$\sum_{i=k+1}^{+\infty} \frac{1}{p_i} < \frac{1}{2}.$$

2) Soit  $N \in \mathbf{N}^*$ , on note  $N_s = \text{Card} \{n \in \llbracket 1, N \rrbracket, \exists p \geq k+1, p|n\}$  et  $N_i = N - N_s$ . Montrer que  $N_s < \frac{N}{2}$ .

3) Montrer que  $N_i \leq 2^k \sqrt{N}$ . Pour  $n \in \llbracket 1, N \rrbracket$  tel que  $\forall i \geq k+1, p_i \nmid n$ , on pourra noter  $n = a_n b_n^2$ , avec  $a_n$  le facteur sans carrés dans la décomposition en facteurs premiers.

4) Conclure.

*Preuve due à Erdős.*

**Exercice 28 (\*\*)**

Soit  $u$  une suite décroissante telle que  $\sum u_n$  converge.

1) Pour tout  $n \in \mathbf{N}$ , on note  $S_n = \sum_{k=0}^n u_k$ .

En considérant  $S_{2n} - S_n$ , montrer que  $u_{2n} = o\left(\frac{1}{n}\right)$ .

2) Montrer que  $u_n = o\left(\frac{1}{n}\right)$ .

3) Le résultat est-il toujours vrai si  $u$  n'est pas supposée décroissante ?

## 6 EXERCICES CCINP

## Exercice 29 (Exercice 5 CCINP)

1) On considère la série de terme général  $u_n = \frac{1}{n(\ln n)^\alpha}$  où  $n \geq 2$  et  $\alpha \in \mathbf{R}$ .

(a) **Cas  $\alpha \leq 0$**

En utilisant une minoration très simple de  $u_n$ , démontrer que la série diverge.

(b) **Cas  $\alpha > 0$**

Étudier la nature de la série.

**Indication:** on pourra utiliser la fonction  $f$  définie par  $f(x) = \frac{1}{x(\ln x)^\alpha}$ .

2) Déterminer la nature de la série  $\sum_{n \geq 2} \frac{\left(e - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right) e^{\frac{1}{n}}}{(\ln(n^2 + n))^2}$ .

## Exercice 30 (Exercice 6 CCINP)

Soit  $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$  une suite de réels strictement positifs et  $l$  un réel positif strictement inférieur à 1.

1) Démontrer que si  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = l$ , alors la série  $\sum u_n$  converge.

**Indication:** écrire, judicieusement, la définition de  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = l$ , puis majorer, pour  $n$  assez grand,  $u_n$  par le terme général d'une suite géométrique.

2) Quelle est la nature de la série  $\sum_{n \geq 1} \frac{n!}{n^n}$ ?

## Exercice 31 (Exercice 7 CCINP)

1) Soient  $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$  et  $(v_n)_{n \in \mathbf{N}}$  deux suites de nombres réels positifs. On suppose que  $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$  et  $(v_n)_{n \in \mathbf{N}}$  sont non nulles à partir d'un certain rang. Montrer que:

$$u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n \implies \sum u_n \text{ et } \sum v_n \text{ sont de même nature.}$$

2) Étudier la convergence de la série  $\sum_{n \geq 2} \frac{((-1)^n + i) \ln n \sin\left(\frac{1}{n}\right)}{(\sqrt{n+3} - 1)}$ .

**Remarque :**  $i$  désigne le nombre complexe de carré égal à  $-1$ .

## Exercice 32 (Exercice 46 CCINP)

On considère la série:  $\sum_{n \geq 1} \cos\left(\pi\sqrt{n^2 + n + 1}\right)$ .

1) Prouver que, au voisinage de  $+\infty$ ,  $\pi\sqrt{n^2 + n + 1} = n\pi + \frac{\pi}{2} + \alpha\frac{\pi}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$  où  $\alpha$  est un réel que l'on déterminera.

2) En déduire que  $\sum_{n \geq 1} \cos\left(\pi\sqrt{n^2 + n + 1}\right)$  converge.

3)  $\sum_{n \geq 1} \cos\left(\pi\sqrt{n^2 + n + 1}\right)$  converge-t-elle absolument?