

## SÉRIES À TERMES POSITIFS

## 1 POUR COMMENCER

**Exercice 1 (\*)**

Soit  $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$  une suite d'entiers positifs. À quelle condition simple sur la suite, la série  $\sum u_k$  converge-t-elle?

**Exercice 2 (\*)**

Soit  $(u_n)$  une suite réelle strictement positive. Montrer que la série

$$\sum \ln \left( \frac{u_{k+1}}{u_k} \right)$$

converge si et seulement si la suite  $(u_n)$  converge vers une limite strictement positive.

**Exercice 3 (\*\*) (méthode)**

À l'aide de la comparaison série intégrale, donner un équivalent en  $+\infty$  de

$$1. \sum_{k=1}^n k^3.$$

$$2. \sum_{k=2}^n \frac{1}{k \ln k}.$$

**Exercice 4 (\*)**

Montrer l'existence et calculer

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$$

On pourra écrire la fraction sous la forme  $\frac{a}{n} + \frac{b}{n+1} + \frac{c}{n+2}$  avec  $a$ ,  $b$  et  $c$ , trois constantes qui ne dépendent pas de  $n$ .

**Exercice 5 (grand classique)**

Pour tout  $n \in \mathbf{N}^*$ , on pose  $u_n = \frac{(-1)^n}{n}$ .

On considère la série  $\sum u_n$  appelée série harmonique alternée.

- Étudier l'éventuelle convergence absolue de la série.
- Pour tout  $n \in \mathbf{N}$ , on pose  $S_n = \sum_{k=1}^n u_k$ .
  - Montrer que  $(S_{2k})$  et  $(S_{2k+1})$  sont des suites adjacentes.
  - En déduire que la série  $\sum u_n$  est semi-convergente.

## 2 ENTRAÎNEMENT

**Exercice 6 (\*)**

Étudier la nature de la série

$$\sum \left( \sqrt{k+1} - \lambda \sqrt{k} \right)$$

en fonction de  $\lambda \in \mathbf{R}$ .

**Exercice 7 (\*  $\rightarrow$  \*\*)**

Donner la nature de la série de terme général

$$1. \ln \left( \frac{n^2 + n + 1}{n^2 + n - 1} \right)$$

$$2. \frac{1}{n + (-1)^n \sqrt{n}}$$

$$3. n^{-\ln(\ln n)}$$

$$4. \left( \frac{n}{n+1} \right)^{n^2}$$

$$5. \left( \frac{n}{n+1} \right)^n$$

$$6. \frac{1}{1^2 + 2^2 + \dots + n^2}$$

$$7. \left( \frac{1}{2} \right)^{\sqrt{n}}$$

**Exercice 8 (\*)**

Soit  $(u_n)$  une suite positive telle que  $\sum u_n$  converge. Montrer que  $\sum u_n^2$  converge. La réciproque est-elle vraie ?

## 3 APPROFONDISSEMENT

**Exercice 9 (\*)**

Montrer que si  $\sum (u_n + v_n)$  converge, alors  $\sum u_n$  et  $\sum v_n$  sont de même nature.

**Exercice 10 (\*\*\*) (Séries de Bertrand)**

Soient  $\alpha$  et  $\beta$  deux réels. On appelle série de Bertrand, la série

$$\sum_{n \geq 2} \frac{1}{n^\alpha (\ln n)^\beta}$$

Étudier la nature de cette série.

**Exercice 11 (\*\*\*)**

- Soit  $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$  une suite réelle décroissante, positive.

On pose

$$\forall n \in \mathbf{N}, \quad v_n = 2^n u_{2^n}$$

Montrer que

$$\sum u_n \text{ converge si et seulement si } \sum v_n \text{ converge}$$

- Application : étudier la convergence des séries

$$\sum \frac{1}{n \ln n} \quad \text{et} \quad \sum \frac{1}{n \ln n \ln(\ln n)}$$

- Généralisation* : Soient  $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$  une suite réelle décroissante, positive et  $p \in \mathbf{N}$  tel que  $p \geq 2$ .

On pose

$$\forall n \in \mathbf{N}, \quad v_n = p^n u_{p^n}$$

Montrer que

$$\sum u_n \text{ converge si et seulement si } \sum v_n \text{ converge}$$