PYTHON : ÉTUDE D'UNE SUITE RÉCURRENTE

A Définition de la suite logistique

On s'intéresse aux suites récurrentes (u_n) définies par :

$$\mu > 0, \quad u_0 \in [0,1] \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \mu(1-u_n)u_n$$

1) Écrire une fonction `suite(u0,mu,n)` qui renvoie le terme u_n de la suite.

2) Écrire une fonction `suiteListe(u0,mu,n)` qui renvoie la liste des n premiers termes de la suite.

B Dynamique de la suite logistique

1) Tracer les 30 premiers termes de la suite pour $u_0 = 0,8$ et

(a) $\mu = 0,9$,
(b) $\mu = 1,8$,
(c) $\mu = 2,9$,
(d) $\mu = 3,1$,
(e) $\mu = 3,5$,
(f) $\mu = 3,6$.

Conjecturer les natures des suites.

2) Pour voir le comportement dynamique d'une suite récurrente définie par une fonction f, on peut aussi tracer la courbe de f et celle de la fonction identité sur un même graphe.

Ensuite, on place les différents points (u_0,u_0), (u_0,u_1), (u_1,u_1) $(u_1,u_2)\cdots$ que l'on relie par une ligne brisée.

Définir une fonction `dynamique(u0,mu,n)` qui réalise un tel graphique (en se plaçant sur l'intervalle $[0,1]$ qui est stable par f).

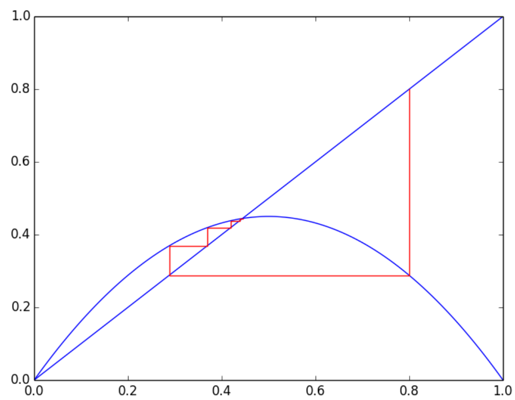
Réaliser ces graphiques avec les valeurs de u_0 et μ utilisées précédemment. Par exemple, pour $mu = 1.8$, on doit trouver la figure 1a.

C Bifurcations

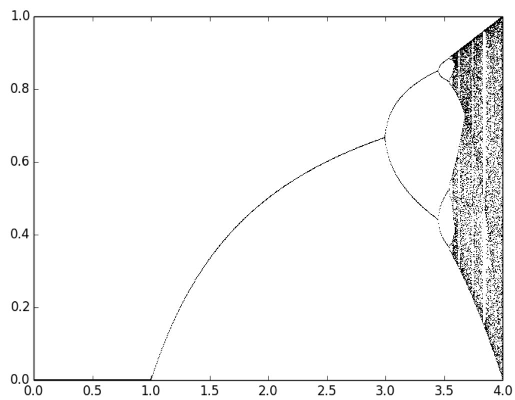
On observe que les comportements varient suivant les valeurs de μ. Pour étudier cela, nous allons nous placer assez loin sur la suite pour qu'elle soit très proche de sa limite si elle converge et ne pas être dérangé par les premiers termes.

Par exemple, on fixe $n = 250$. Si la suite converge, alors tous les termes suivants, auront presque la même valeur que u_{250}, sinon, on observera un étalement des valeurs.

Tracer un diagramme dont l'abscisse corresponde aux différentes valeurs de $\mu \in [0,4[$ et avec en ordonnée (pour chaque valeur de μ) les 100 valeurs prises par u_n pour $n \in [\![250,349]\!]$.
On doit obtenir la figure 1b. Interpréter.



(a) Dynamique de la suite pour $\mu = 1.8$



(b) Diagramme de bifurcation