Suites définies par des fonctions

1 Suites récurrentes

Exercice 1 (*)
Pour quels $u_0 \in \mathbf{R}$ la suite définie par $u_{n+1} = \dfrac{1+u_n}{1-u_n}$ existe-t-elle ?
Montrer qu'elle est alors périodique.

Exercice 2 (*)
On considère la suite u définie par $u_0 \in [0,1]$ et

$$\forall n \in \mathbf{N},\ u_{n+1} = \frac{1}{1+u_n^2} = f(u_n)$$

1) Montrer que $\forall n \in \mathbf{N}^*$, $u_n \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$.
2) Montrer que f admet un unique point fixe sur $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$ (dont on ne cherchera pas la valeur). On note ce point fixe ℓ.
3) Montrer que (u_n) converge vers ℓ.

Exercice 3 (**)
Étudier la suite définie par

$$u_0 = \frac{\pi}{4} \quad \text{et} \quad u_{n+1} = 1 - \cos u_n.$$

Exercice 4 (**)
On définit la suite u par $u_0 \in]0,1[$ et pour tout $n \in \mathbf{N}$,

$$u_{n+1} = \frac{\sqrt{u_n}}{\sqrt{u_n} + \sqrt{1-u_n}}.$$

1) Montrer que la suite u est bien définie.
2) Pour tout $n \in \mathbf{N}$, on pose $v_n = \frac{u_n}{1-u_n}$. Montrer que la suite v est bien définie, et exprimer v_{n+1} en fonction de v_n
3) Montrer que (u_n) converge et déterminer sa limite.

Exercice 5 (**)
On considère la suite u définie par $u_0 \in]3,4[$ et

$$\forall n \in \mathbf{N},\ u_{n+1} = 4 - \frac{1}{4}\ln u_n = f(u_n).$$

Étude de la suite.

Exercice 6 (***)
On considère l'application f définie par

$$f(x) = \sqrt{\frac{2-x}{1+x}}.$$

1) Étudier le domaine de définition de f.
2) On pose $u_0 = \frac{1}{2}$ et $\forall n \in \mathbf{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.
Montrer que la suite est bien définie et étudier sa nature.

Exercice 7 (***) (Théorème du point fixe)
Le but de cet exercice est de démontrer le théorème du point fixe de Banach-Picard.
Soit I un intervalle, et $f : I \to I$ une application contractante :

$$\exists k \in [0,\, 1[,\ \forall (x,\, y) \in I^2,\ |f(y) - f(x)| \leqslant k\,|y-x|\,.$$

On considère la suite définie par

$$x_0 \in I,\ \forall n \in \mathbf{N},\ x_{n+1} = f(x_n)\,.$$

1) Montrer que si f admet un point fixe sur I, alors il est unique.
2) (a) Montrer qu'il existe $M \in \mathbf{R}$ et $k < 1$ tel que
$$\forall n \in \mathbf{N}, \forall p \in \mathbf{N}, |x_{n+p} - x_n| \leqslant k^n M.$$
(b) En déduire que
$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_\varepsilon \in \mathbf{N},\ \forall n \in \mathbf{N}, \forall p \in \mathbf{N}, n \geqslant n_\varepsilon \Rightarrow |x_{n+p} - x_n| \leqslant \varepsilon.$$
On dit que $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est une suite de Cauchy.
3) Montrer que $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est bornée.
4) Montrer que $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge.
5) On note ℓ la limite de (x_n). Montrer que $\ell \in I$, alors $f(\ell) = \ell$.

Exercice 8 (***)

1) Si u est une suite réelle telle que $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_{n+1} - u_n) = 0$, alors les valeurs d'adhérence de u forment un intervalle.
2) Soit $a < b$ deux réels et $f : [a,\, b] \to [a,\, b]$ une fonction continue.
On considère la suite définie par
$$u_0 \in [a,\, b], \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbf{N},\ u_{n+1} = f(u_n).$$
Montrer que si $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_{n+1} - u_n) = 0$, alors $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge.

2 Suites implicites

Exercice 9 (**)
Pour tout entier $n \geqslant 1$, on considère la fonction f_n définie sur $\mathbf{R}_+$ par

$$f_n(x) = \sum_{k=1}^{n} kx^k.$$

1) Pour tout $n \geqslant 1$, montrer que l'équation $f_n(x) = 1$ admet une unique solution sur $\mathbf{R}_+$ que l'on notera u_n.
2) En comparant $f_{n+1}(u_n)$ et $f_{n+1}(u_{n+1})$, montrer que la suite u est monotone.
3) En déduire que la suite converge.

Exercice 10 (**)

1) Soit $n \geqslant 1$. Montrer que l'équation d'inconnue x : $\tan(nx) = \dfrac{1}{2x}$ admet une unique solution sur$\left]0, \frac{\pi}{2n}\right[$ notée x_n.
2) Montrer que $x_n \sim \dfrac{\pi}{2n}$.
3) Déterminer un équivalent simple de $x_n - \dfrac{\pi}{2n}$.

Exercice 11 (***)
On considère la fonction

$$f\ : x \mapsto \frac{x\ln(x)}{x+1}.$$

1) Montrer que $\forall n \in \mathbf{N}^*$, l'équation $f(x) = n$ admet une unique solution notée α_n.
2) Démontrer que $\forall n \in \mathbf{N}^*$, $\alpha_n \geqslant \mathrm{e}^n$ puis que $\alpha_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \mathrm{e}^n$.
3) Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, on définit ε_n tel que $\alpha_n = \mathrm{e}^n(1+\varepsilon_n)$.
Démontrer que $\varepsilon_n \underset{n\to+\infty}{\sim} n\,\mathrm{e}^{-n}$.
En déduire que $\forall n \in \mathbf{N}^*$, $\alpha_n - \mathrm{e}^n \sim n$.

Exercice 12 (***)

1) Montrer que pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, l'équation $x^n + x - 1 = 0$ admet une unique solution $\alpha_n \in]0;1]$.
2) Montrer que la suite (α_n) est croissante et converge vers 1.
3) Montrer que $\alpha_n = 1 - \frac{\ln n}{n} + v_n$ avec $v_n = o\left(\frac{\ln n}{n}\right)$.

Exercice 13 (***)
Soit $n \in \mathbf{N}^*$, on considère la fonction f_n définie sur $\mathbf{R}$ par

$$f_n(x) = x^{n+1} - x^{n-1} + 1.$$

1) Dresser le tableau de variations de f_n, préciser le nombre de solutions de l'équation $f_n(x) = 3 + \frac{1}{n}$.
2) On note x_n l'unique solution positive de l'équation précédente.
   (a) Déterminer x_1.
   (b) Montrer que $\forall n \in \mathbf{N}^*,\ x_n \geqslant 1$.
   (c) Étudier le signe de $f_{n+1}(x) - f_n(x)$ pour tout $x \geqslant 1$.
   En déduire la monotonie de la suite $(x_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$
3) Montrer que la suite $(x_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ converge et déterminer sa limite.
4) Déterminer le terme suivant du développement asymptotique de x_n.

Exercice 14 (***)
Soit $n \geqslant 3$.

1) Montrer que l'équation $\mathrm{e}^x = x^n$ admet deux solutions sur $]0,+\infty[$, notées u_n et v_n et telles que $1 < u_n < \mathrm{e} < v_n$.
2) Déterminer un développement asymptotique à trois termes de la suite u.
3) Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$.
4) Montrer que $v_n \sim n\ln n$.

Exercice 15 (**)
Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, on note

$$f\ :\ \left\{\begin{array}{ccc} \left[0, \frac{\pi}{2}\right] & \to & \mathbf{R} \\ x & \mapsto & x\cos^n(x). \end{array}\right.$$

1) Montrer que f_n admet un maximum atteint en un unique point $x_n \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.
2) Montrer que $(x_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ converge et calculer sa limite.
3) Trouver un équivalent de x_n en $+\infty$.
4) En déduire un équivalent de $f_n(x_n)$ quand $n \to +\infty$.

Exercice 16 (**)
On considère une suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ telle que

$$\forall n \in \mathbf{N},\, u_n^5 + nu_n = 1.$$

1) Montrer que la suite est définie de manière unique.

2) Déterminer un développement asymptotique à deux termes de u_n en $+\infty$.

Exercice 17 (***)
Montrer que pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, l'équation

$$\mathrm{e}^x = n - x$$

admet une unique solution positive x_n.
Déterminer un développement asymptotique à trois termes de x_n.

2.1 Développement asymptotique

Exercice 18 (***)
On définit la suite u par $u_0 \in \mathbf{R}$ et $\forall n \geqslant 1$, $u_{n+1} = 1 + \frac{u_n}{n+1}$.
Déterminer un développement asymptotique à trois termes de u_n.

Exercice 19 (Césaro)
On définit la suite u par $u_0 = 1$ et $\forall n \in N$, $u_{n+1} = u_n + \frac{1}{u_n^2}$.

1) Montrer que u est bien définie et diverge vers $+\infty$.

2) Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{n+1}^3 - u_n^3 = 3$.

3) En déduire, à l'aide de Césaro que $u_n^3 \sim 3n$.

4) Donner un équivalent de la suite u.

3 Exercices CCINP

Déjà vu dans le chapitre sur la convergence des suites.

Exercice 20 (Exercice 43 CCINP)
Soit $x_0 \in \mathbf{R}$.
On définit la suite (u_n) par $u_0 = x_0$ et, $\forall n \in \mathbf{N}$, $u_{n+1} = \mathrm{Arctan}(u_n)$.

1) (a) Démontrer que la suite (u_n) est monotone et déterminer, en fonction de la valeur de x_0, le sens de variation de (u_n).
   (b) Montrer que (u_n) converge et déterminer sa limite.

2) Déterminer l'ensemble des fonctions h, continues sur $\mathbf{R}$, telles que : $\forall x \in \mathbf{R}$, $h(x) = h(\mathrm{Arctan}\, x)$.