Suites numériques

1 Pour commencer

Exercice 1 (Vrai / Faux)
Répondre en justifiant.

1. Le produit de deux suites majorées est-il nécessairement majoré ?
2. Une suite non croissante est-elle nécessairement décroissante ?
3. Une suite qui converge vers une limite strictement positive ℓ a-t-elle tous ses termes strictement positifs à partir d'un certain rang ?
4. Une suite à termes positifs qui tend vers 0 est-elle nécessairement décroissante à partir d'un certain rang ?
5. La somme (ou la différence) de deux suites divergentes est-elle nécessairement divergente ?
6. Existe-t-il une suite divergente $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ telle que $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_{n+1}-u_n)=0$?
7. Une suite divergente est-elle nécessairement non bornée ?
8. Une suite non bornée est-elle nécessairement divergente ?
9. Si (u_{2n}) et (u_{2n+1}) convergent, alors (u_n) converge-t-elle nécessairement ?

Exercice 2 (Conditions nécessaires et suffisantes)

1. Suffit-il qu'une suite soit croissante pour qu'elle admette une limite ?
2. Est-il nécessaire qu'une suite soit croissante pour qu'elle admette une limite ?
3. Une suite croissante admet-elle nécessairement une limite ?
4. Une suite qui admet une limite est-elle nécessairement croissante ?

Exercice 3 (**)
Soit (u_n) une suite monotone telle que (u_{2n}) converge.
Montrer que (u_n) converge.

2 Suites définies explicitement

A Nature et limite

Énoncé commun à tous les exercices de cette partie :
Vérifier que la suite est bien définie, trouver sa nature (avec démonstration), et calculer sa limite si elle existe.

Exercice 4 (*)

1. $\forall n\in\mathbf{N}^*,\ u_n=\dfrac{3n^2-2n+1}{n^6-2n^4-9}$
2. $\forall n\in\mathbf{N}^*,\ u_n=\dfrac{3n^2-2n+1}{n\sqrt{n}+n-1}$
3. $\forall n\in\mathbf{N}^*,\ u_n=\dfrac{n^3+5n}{5n^3+\cos(n)+\frac{1}{n^2}}$

Exercice 5 (**)

1. $\forall n\in\mathbf{N},\ u_n=\sqrt{1+n^2}-\sqrt{1+n}$
2. $\forall n\in\mathbf{N}^*,\ u_n=\sqrt{n^2+1}-\sqrt{n^2-1}$
3. $\forall n\in\mathbf{N}^*,\ u_n=\dfrac{\sqrt{(n+1)(n+3)}+\sqrt{n}}{n}$
4. $\forall n\in\mathbf{N}^*,\ u_n=\dfrac{1}{n}\sin\dfrac{1}{n}$

Exercice 6 (**)

1. $\forall n\in\mathbf{N}^*,\ u_n=\dfrac{\sin\left(n^3\right)}{n}$
2. $\forall n\in\mathbf{N}^*,\ u_n=\dfrac{1}{n}\sin n$
3. $\forall n\in\mathbf{N}^*,\ u_n=(-1)^n+\dfrac{1}{n}$

Exercice 7 (**)
$\forall n\in\mathbf{N}^*,\ u_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{n^2+k}}$

Exercice 8 (**)
$\forall n\in\mathbf{N}^*,\ u_n=\dfrac{\ln(n!)}{n^2}$

B Nature

Énoncé commun à tous les exercices de cette partie :
Vérifier que la suite est bien définie, trouver sa nature (avec démonstration),

Exercice 9 (**)

$$\forall n\in\mathbf{N}^*,\ u_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{kn}.$$

Exercice 10 (**) (Série harmonique alternée)

$$\forall n\in\mathbf{N}^*, u_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}}{k}$$

Indication[1]

3 Couples de suites

Exercice 11 (*)
On considère les suites $(u_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ et $(v_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ définies ci-après. Montrer que les suites sont adjacentes et qu'elles convergent.

1. $\forall n\in\mathbf{N}^*,\quad u_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}$ et $v_n=u_n+\dfrac{1}{n}$.
2. $\forall n\in\mathbf{N}^*,\quad u_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^3}$ et $v_n=u_n+\dfrac{1}{n^2}$.

Exercice 12 (***)
Soient (u_n) et (v_n) deux suites de $[0,1]^{\mathbf{N}}$ telles que $(u_n\,v_n)$ converge vers 1.
Montrer que (u_n) et (v_n) convergent.
Indication[2]

1. Étudier (u_{2n}) et (u_{2n+1})
2. Utiliser un théorème de comparaison.

4 Suites récurrentes

Exercice 13 (**)
Étudier les suites (u_n) définies par

1. $u_0 \in \mathbf{R}$ et $\forall n \in \mathbf{N},\ u_{n+1} = \dfrac{u_n}{n+1}$.
2. $u_0 \in \mathbf{R}$ et $\forall n \in \mathbf{N},\ u_{n+1} = u_n^2 - 2u_n + 4$.
3. $u_0 \in \mathbf{R}$ et $\forall n \in \mathbf{N},\ u_{n+1} = \sqrt{\dfrac{3}{4} + u_n^2}$.
4. $u_0 \in \mathbf{R}$ et $\forall n \in \mathbf{N},\ u_{n+1} = \sqrt{1 + u_n + u_n^2}$.
5. $u_0 \in \mathbf{R}$ et $\forall n \in \mathbf{N},\ u_{n+1} = \sqrt{1 - u_n + u_n^2}$.

Exercice 14 (***)
Soit la suite (u_n) définie par

$$u_0 = \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbf{N},\ u_{n+1} = \sqrt{2 - u_n}$$

1. Vérifier que (u_n) est bien définie.
2. Si la suite converge, que vaut sa limite ?
3. Montrer que $\forall n \in \mathbf{N},\ u_n \in \left[\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right]$.
4. En déduire que $\forall n \in \mathbf{N},\ |u_{n+1} - 1| \leq \frac{2}{3}|u_n - 1|$.
   Indication[3]
5. Conclure sur la convergence de (u_n).

Relations de comparaison

1 Pour commencer...

Exercice 15
Classer les suites, dont les termes généraux sont les suivants, par ordre de négligeabilité :

1. $\dfrac{1}{n},\ \dfrac{1}{n^2},\ \dfrac{\ln n}{n},\ \dfrac{\ln n}{n^2},\ \dfrac{1}{n \ln n}$
2. $n,\ n^2,\ n \ln n,\ \sqrt{n} \ln n,\ \dfrac{n^2}{\ln n}$

Exercice 16 (Vrai-Faux)
Dire pour chaque proposition si elle est vraie ou fausse. Le démontrer.

1. Si $u_n \sim v_n$ alors pour toute application f définie sur $\mathbf{R}$, $f(u_n) \sim f(v_n)$,
2. Si $(u_n) \ll (n)$ et $(v_n) \ll (n)$, alors $(u_n - v_n) \ll (0)$,
3. Si $u_n \sim \frac{1}{n}$ alors $u_n > 0$ à partir d'un certain rang,
4. Si $u_n \sim v_n$ alors $u_n - v_n$ tend vers 0,
5. Si $\lim\limits_{n \to +\infty} (u_n - v_n) = 0$
   et si (v_n) ne s'annule pas alors $u_n \sim v_n$.

Exercice 17 (*)
Calculer $\lim\limits_{m \to +\infty} \lim\limits_{n \to +\infty} \left(1 - \dfrac{1}{n}\right)^m$, $\lim\limits_{n \to +\infty} \lim\limits_{m \to +\infty} \left(1 - \dfrac{1}{n}\right)^m$, et $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(1 - \dfrac{1}{n}\right)^n$.

Exercice 18
Donner un équivalent simple de chacune des suites des exercices 4 et 5.

2 Calculs

Exercice 19 (*)
Donner la nature de la suite, et sa limite éventuelle

1. $\forall n \in \mathbf{N}^*,\ u_n = \dfrac{(-2)^n}{n^2}$.
2. $\forall n \in \mathbf{N}^*,\ u_n = \dfrac{\ln n}{n}$.

Exercice 20 (*)
Trouver un équivalent simple et la limite éventuelle :

1. $u_n = n^2 - n$.
2. $u_n = \dfrac{n^3 - \sqrt{n^2+1}}{\ln n - 2n^2}$.
3. $u_n = \dfrac{2n^3 - \ln n + 1}{n^2 + 1}$.
4. $u_n = \dfrac{2n^2 + n \ln^2 n}{n^2 \ln n + \sqrt{n}}$.
5. $u_n = \dfrac{n + \mathrm{e}^n}{2^n + 3^n}$.
6. $u_n = \mathrm{e}^n + n^{\mathrm{e}}$.

Exercice 21 (**)
Trouver un équivalent simple et la limite éventuelle :

1. $u_n = \sqrt{n+1} + \sqrt{n}$.
2. $u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$.
3. $u_n = \sqrt[3]{n^3+1} - n$.
4. $u_n = \sqrt{n + \sqrt{n+1}} - \sqrt{n - \sqrt{n+1}}$.
5. $u_n = \dfrac{\ln(n+1) - \ln n}{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}$.
6. $u_n = (n+1)^{n+1} - n^n$.

Exercice 22 (**)
Trouver un équivalent simple :

1. $u_n = \sin \dfrac{1}{n} - \tan \dfrac{1}{n}$.
2. $u_n = \dfrac{\sin \frac{1}{n}}{\mathrm{e}^{\frac{1}{n}} - 1}$.

3. On pourra utiliser la quantité conjuguée.