Récurrence et suites usuelles

Peu de ces exercices font appel à la récurrence.
D'autres exercices de récurrence sont placés dans le chapitre de logique.

1 Application directe du cours

Exercice 1 (*)

1) (u_n) est une suite géométrique de raison 2 telle que $u_3 = 16$. Que vaut u_0.
2) (u_n) est une suite arithmétique de raison r et (v_n) est une suite géométrique de raison q telles que $u_0 = v_0$.
À quelles conditions sur u_0, r et q a-t-on $u_n = v_n$ pour tout $n \in \mathbf{N}$?
3) Soit (u_n) une suite géométrique de raison q, avec $u_0 = 1$.
Pour tout $n \in \mathbf{N}$, on pose $S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$.
À quelle condition sur $q \in \mathbf{R}$, la suite S_n admet-elle une limite finie ?

Exercice 2 (*)
Exprimer u_n en fonction de n pour les suites définies par :

1) $2u_{n+1} = 5u_n + 2$ et $u_0 = 2$,
2) $u_{n+1} = 1 - u_n$ et $u_1 = 2$,
3) $2u_{n+1} - 2u_n + 1 = 0$ et $u_0 = 4$.

Exercice 3 (*)
Soit la suite définie par $(u_0, u_1) \in \mathbf{R}^2$ et $\forall n \in \mathbf{N},\ u_{n+1} = \dfrac{u_n + u_{n+2}}{2}$.
Montrer que (u_n) est une suite arithmétique dont on précisera la raison.

Exercice 4 (*)
Exprimer u_n en fonction de n pour les suites définies par :

1) $u_{n+2} + 2u_{n+1} = 3u_n$ et $u_0 = u_1 = 1$,
2) $3u_{n+2} - 6u_{n+1} + 3u_n = 0$ et $u_0 = 1, u_1 = 3$,
3) $u_{n+2} = -2u_n$ et $u_0 = u_1 = 1$,
4) $u_n = u_{n+1} + u_{n-1}$ et $u_0 = u_1 = 1$.

Exercice 5 (*)
Exprimer u_n en fonction de n pour les suites définies par :

1) $\forall n \in \mathbf{N},\quad 2u_{n+2} + 5u_{n+1} - 3u_n = 1$.
2) $\forall n \in \mathbf{N},\quad u_{n+2} = 5u_{n+1} - 4u_n + n$.

Exprimer u_n en fonction de n et des conditions initiales.

2 Méthodes

Exercice 6 (**)
Soient (u_n) et (v_n) définies par $u_0 = 1$, $v_0 = 2$ et

$$\forall n \in \mathbf{N},\qquad u_{n+1} + u_n + 2v_n = 0 \quad \text{et} \quad v_{n+1} = 3u_n + 4v_n.$$

Donner les expressions de u_n et v_n en fonction de $n \in \mathbf{N}$.

Exercice 7 (**)
Soient les suites (u_n) et (v_n) définies par $u_0 = 1$ et $v_0 = 2$ et

$$\forall n \in \mathbf{N},\qquad v_n = u_{n+1} + u_n \quad \text{et} \quad u_n = \frac{v_{n+1} - v_n}{4}.$$

Donner les expressions de u_n et de v_n en fonction de $n \in \mathbf{N}$.

Exercice 8 (***)
On définit par récurrence la suite (u_n) par $\forall n \in \mathbf{N},\ u_{n+1} = 2\sqrt{u_n} \quad \text{et} \quad u_0 = 1$.

1) Montrer que la suite est bien définie pour tout $n \in \mathbf{N}$.
2) Trouver la valeur de (u_n) en fonction de n.

3 Divers

Exercice 9 (**) (Tour d'Hanoï)
Combien de coups faut-il au minimum pour déplacer la pile de n rondelles de la première à la dernière tige ?
Rappel des règles : Le jeu contient trois tiges verticales. Au début du jeu la première tige contient n rondelles et les deux suivantes sont vides.
Les n rondelles sont circulaires et de diamètres tous différents. Lors du jeu, on déplace les rondelles une à une entre les tiges. À chaque étape du jeu, le diamètre d'une rondelle sur une tige doit toujours être inférieur à celui des rondelles en dessous.
Le but du jeu est de déplacer toutes les rondelles de la première à la dernière tige en le minimum d'étapes.

Exercice 10 (***) (partie entière)
On définit la suite (u_n) par

$$u_0 \in \mathbf{R} \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbf{N},\ u_n = 2u_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} + 1.$$

1) Montrer que la suite u est bien définie.
2) Calculer u_n pour tout $n \in \mathbf{N}$.

On rappelle que la partie entière de x notée $\lfloor x \rfloor$ est le plus grand entier relatif inférieur ou égal à x. Ainsi, $\lfloor x \rfloor \leqslant x < \lfloor x \rfloor + 1$.