Suites usuelles

1 Application directe du cours

Exercice 1 (*)

1. (u_n) est une suite géométrique de raison 2 telle que $u_3 = 16$. Que vaut u_0.
2. (u_n) est une suite arithmétique de raison r et (v_n) est une suite géométrique de raison q telles que $u_0 = v_0$. À quelles conditions sur u_0, r et q a-t-on $u_n = v_n$ pour tout $n \in \mathbf{N}$?
3. Soit (u_n) une suite géométrique de raison q, avec $u_0 = 1$.
   Pour tout $n \in \mathbf{N}$, on pose $S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$.
   À quelle condition sur q, la suite S_n admet-elle une limite finie ?

Exercice 2 (*)
Exprimer u_n en fonction de n pour les suites définies par :

1. $2u_{n+1} = 5u_n + 2$ et $u_0 = 2$,
2. $u_{n+1} = 1 - u_n$ et $u_0 = 2$,
3. $2u_{n+1} - 2u_n + 1 = 0$ et $u_0 = 4$.

Exercice 3 (*)
Soit la suite définie par $(u_0, u_1) \in \mathbf{R}^2$ et

$$\forall n \in \mathbf{N},\ u_{n+1} = \frac{u_n + u_{n+2}}{2}.$$

Montrer que (u_n) est une suite arithmétique dont on précisera la raison.

Exercice 4 (*)
Exprimer u_n en fonction de n pour les suites définies par :

1. $u_{n+2} + 2u_{n+1} = 3u_n$ et $u_0 = u_1 = 1$,
2. $3u_{n+2} - 6u_{n+1} + 3u_n = 0$ et $u_0 = 1, u_1 = 3$,
3. $u_{n+2} = -2u_n$ et $u_0 = u_1 = 1$,
4. $u_n = u_{n+1} + u_{n-1}$ et $u_0 = u_1 = 1$.

2 Méthodes

Exercice 5 (**)
Soit (u_n) une suite définie par le relation de récurrence :

$$\forall n \in \mathbf{N}, \quad 2u_{n+2} + 5u_{n+1} - 3u_n = 1.$$

Exprimer u_n en fonction de n et des conditions initiales.

Exercice 6 (**)
Étudier la suite définie par

$$\forall n \in \mathbf{N}, \quad u_{n+2} = 5u_{n+1} - 4u_n + n.$$

Exercice 7 (***)
On définit par récurrence la suite (u_n) par

$$\forall n \in \mathbf{N},\ u_{n+1} = 2\sqrt{u_n} \quad \text{et} \quad u_0 = 1.$$

1. Montrer que la suite est bien définie pour tout $n \in \mathbf{N}$.
2. Trouver la valeur de (u_n) en fonction de n.

3 Couples de suites

Exercice 8 (**)
Soient (u_n) et (v_n) définies par $u_0 = 1$, $v_0 = 2$ et

$$\forall n \in \mathbf{N}, \qquad u_{n+1}+u_n+2v_n = 0 \quad \text{et} \quad v_{n+1} = 3u_n+4v_n.$$

Donner les expressions de u_n et v_n en fonction de $n \in \mathbf{N}$.

Exercice 9 (**)
Soient les suites (u_n) et (v_n) définies par $u_0 = 1$ et $v_0 = 2$ et

$$\forall n \in \mathbf{N}, \qquad v_n = u_{n+1} + u_n \quad \text{et} \quad u_n = \frac{v_{n+1} - v_n}{4}.$$

Donner les expressions de u_n et de v_n en fonction de $n \in \mathbf{N}$.

4 Synthèse

Exercice 10 (***)
On considère la suite définie par $u_0 = 1$ et

$$\forall n \in \mathbf{N},\ u_{n+1} = \frac{3u_n + 1}{2u_n + 4}.$$

1. Montrer que la suite est bien définie pour tout $n \in \mathbf{N}$.
2. Pour tout $n \in \mathbf{N}$, on pose
   $$v_n = \frac{2u_n - 1}{u_n + 1}.$$
   Justifier que la suite v est bien définie.
3. Trouver une relation de récurrence sur v et en déduire les valeurs de v_n en fonction de $n \in \mathbf{N}$.
4. Donner l'expression de u_n en fonction de $n \in \mathbf{N}$.

   En déduire la nature de u (convergente ou divergente) et son éventuelle limite.