Convergence des suites

1 Pour commencer

Exercice 1 (Vrai / Faux)
Répondre en justifiant.

1) Le produit de deux suites majorées est-il nécessairement majoré ?
2) Une suite non croissante est-elle nécessairement décroissante ?
3) Une suite qui converge vers une limite strictement positive ℓ a-t-elle tous ses termes strictement positifs à partir d'un certain rang ?
4) Une suite à termes positifs qui tend vers 0 est-elle nécessairement décroissante à partir d'un certain rang ?
5) La somme (ou la différence) de deux suites divergentes est-elle nécessairement divergente ?
6) Existe-t-il une suite divergente $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ telle que $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_{n+1}-u_n)=0$?
7) Une suite divergente est-elle nécessairement non bornée ?
8) Une suite non bornée est-elle nécessairement divergente ?
9) Si (u_{2n}) et (u_{2n+1}) convergent, alors (u_n) converge-t-elle nécessairement ?

Exercice 2 (*)
Soit (u_n) une suite monotone telle que (u_{2n}) converge.
Montrer que (u_n) converge.

Exercice 3 (*)
On considère les suites $(u_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ et $(v_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ définies ci-après. Montrer que les suites sont adjacentes et qu'elles convergent.

1) $\forall n\in\mathbf{N}^*,\quad u_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}$ et $v_n=u_n+\dfrac{1}{n}$.
2) $\forall n\in\mathbf{N}^*,\quad u_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^3}$ et $v_n=u_n+\dfrac{1}{n^2}$.

Exercice 4 (*)
Étudier la suite z définie par

$$\forall n\in\mathbf{N},\ z_n=(-1)^n\,\mathrm{e}^{in\frac{\pi}{2}}.$$

2 Suites définies explicitement

2.1 Nature et limite

Énoncé commun à tous les exercices de cette partie :
Vérifier que la suite est bien définie, trouver sa nature (avec démonstration), et calculer sa limite si elle existe.

Exercice 5 (*)

1) $\forall n\in\mathbf{N}^*,\ u_n=\dfrac{1}{n}\sin\dfrac{1}{n}$.
2) $\forall n\in\mathbf{N}^*,\ u_n=\dfrac{3n^2-2n+1}{n\sqrt{n}+n-1}$.
3) $\forall n\in\mathbf{N}^*,\ u_n=\dfrac{3n^2-2n+1}{n^6-2n^4-9}$.
4) $\forall n\in\mathbf{N}^*,\ u_n=\dfrac{n^3+5n}{5n^3+\cos(n)+\frac{1}{n^2}}$.

Exercice 6 (*)

1) $\forall n\in\mathbf{N},\ u_n=\sqrt{1+n^2}-\sqrt{1+n}$.
2) $\forall n\in\mathbf{N}^*,\ u_n=\sqrt{n^2+1}-\sqrt{n^2-1}$.
3) $\forall n\in\mathbf{N}^*,\ u_n=\dfrac{\sqrt{(n+1)(n+3)}+\sqrt{n}}{n}$.
4) $\forall n\in\mathbf{N},\ u_n=n-\sqrt{(n+1)(n+3)}-\sqrt{n}$.

Exercice 7
$\forall n\in\mathbf{N}^*,\ u_n=\dfrac{n\cos(\pi\sqrt{n})-\sqrt{n}}{n+\sqrt{n}}$.

Exercice 8 (**)

$$\forall n\in\mathbf{N}^*,\ u_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{n^2+k}}.$$

2.2 Nature

Énoncé commun à tous les exercices de cette partie :
Vérifier que la suite est bien définie, trouver sa nature (avec démonstration),

Exercice 9 (**)

$$\forall n \in \mathbf{N}^*,\ u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{kn}.$$

Exercice 10 (***)

$$\forall n \in \mathbf{N}^*, u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k}.$$

Exercice 11 (***)
Montrer que la suite $(\sin(n))_{n\in\mathbf{N}}$ diverge.

Exercice 12 (***)
Pour $\alpha \in \mathbf{R}$, on définit la suite u par :

$$\forall n \in \mathbf{N}^*,\ u_n = \frac{\ln(n!)}{n^\alpha}.$$

Déterminer la nature de la suite en fonction de α.
Voir les indications pour des sous-questions.

3 Suites et primitives

Exercice 13 (**)
Pour $n \in \mathbf{N}$, on pose

$$u_n = \int_0^1 \left(1-t^2\right)^n \,\mathrm{d}t \quad \text{et} \quad v_n = \int_0^{\sqrt{n}} \mathrm{e}^{-t^2} \,\mathrm{d}t.$$

1) Montrer que la suite u est strictement décroissante.
2) Montrer que la suite v est majorée.
3) Montrer que pour tout $x \in [0,\, 1]$, $0 \leqslant 1-x \leqslant \mathrm{e}^{-x}$ et en déduire que u converge vers 0.
4) Montrer que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_{n+1} = \frac{2n+2}{2n+3} u_n$.
5) En déduire une expression simple de u_n.

Exercice 14 (***)
Pour tout $n \in \mathbf{N}$, on définit

$$\begin{cases} u_n &= \displaystyle\int_0^1 \frac{t^n}{1+\mathrm{e}^t}\,\mathrm{d}t \\ v_n &= \displaystyle\int_0^n \frac{t^n}{1+\mathrm{e}^t}\,\mathrm{d}t \\ w_n &= \displaystyle\int_0^n \frac{t}{1+\mathrm{e}^t}\,\mathrm{d}t \end{cases}$$

Étudier la nature de chacune de ces suites.

4 Exercices théoriques

Exercice 15 (**) (à connaître)
Soit u une suite à valeurs non nulles.
On suppose que $\frac{u_{n+1}}{u_n} \to \ell \in \overline{\mathbf{R}}$.

1) Montrer que si $\ell \in]-1,\, 1[$, alors la suite converge vers 0.
2) Montrer que si $\ell \in]1,\, +\infty[\cup \{+\infty\}$, alors la suite est de signe constant à partir d'un certain rang et diverge vers $+\infty$ ou $-\infty$.
3) Montrer que si $\ell \in]-\infty,\, -1[\cup \{-\infty\}$, alors la suite diverge sans admettre de limite.
4) Montrer que si $\ell = -1$ ou $\ell = 1$, alors on ne peut pas conclure a priori (donner des exemples de convergence et de divergence).

Exercice 16 (**)
Soient (u_n) et (v_n) deux suites de $[0,1]^{\mathbf{N}}$ telles que $(u_n\, v_n)$ converge vers 1.
Montrer que (u_n) et (v_n) convergent.

Exercice 17 (**)
Soit une suite réelle telle que

$$\forall (k,\, n) \in (\mathbf{N}^*)^2,\ 0 \leqslant u_n \leqslant \frac{k}{n} + \frac{1}{k}.$$

Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge vers 0.

5 Premières suites récurrentes

Exercice 18 (*)
Étudier les suites (u_n) définies par

1) $u_0 \in \mathbf{R}$ et $\forall n \in \mathbf{N},\ u_{n+1} = \dfrac{u_n}{n+1}$.

2) $u_0 \in \mathbf{R}$ et $\forall n \in \mathbf{N},\ u_{n+1} = u_n^2 - 2u_n + 4$.

3) $u_0 \in \mathbf{R}$ et $\forall n \in \mathbf{N},\ u_{n+1} = \sqrt{\dfrac{3}{4} + u_n^2}$.

4) $u_0 \in \mathbf{R}$ et $\forall n \in \mathbf{N},\ u_{n+1} = \sqrt{1 + u_n + u_n^2}$.

5) $u_0 \in \mathbf{R}$ et $\forall n \in \mathbf{N},\ u_{n+1} = \sqrt{1 - u_n + u_n^2}$.

6) $u_0 \in \mathbf{R}$ et $\forall n \in \mathbf{N},\ u_{n+1} = 1 - \cos u_n$.

Exercice 19 (**)
Soit la suite (u_n) définie par

$$u_0 = \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbf{N},\ u_{n+1} = \sqrt{2 - u_n}.$$

1) Vérifier que (u_n) est bien définie.

2) Si la suite converge, que vaut sa limite ?

3) Montrer que $\forall n \in \mathbf{N},\ |u_{n+1} - 1| \leqslant \frac{2}{3}|u_n - 1|$.

4) Conclure sur la convergence de (u_n).

Exercice 20 (***)
Étudier la suite u définie par

$$\forall n \in \mathbf{N}, \quad u_{n+1} = f(u_n) \quad \text{avec } f : x \mapsto \frac{1}{2}\cos(x).$$

6 Densité

Ces exercices sont plus difficiles et ne sont donc pas prioritaires.

Exercice 21 (**)
On admet que $\mathbf{Z} + 2\pi\mathbf{Z}$ est dense dans $\mathbf{R}$.

1) Montrer que $\{\sin(n)\}_{n\in\mathbf{N}}$ est dense dans $[-1, 1]$.

2) Montrer que tout $x \in [-1, 1]$, est valeur d'adhérence de la suite $(\sin(n))_{n\in\mathbf{N}}$.

Exercice 22 (***)
Soient u et v deux suites de nombres réels telles que

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} v_n = +\infty \text{ et } \lim_{n\to+\infty} u_{n+1} - u_n = 0.$$

1) Montrer que $\left\{u_p - v_q,\ (p, q) \in \mathbf{N}^2\right\}$ est dense dans $\mathbf{R}$.

2) Montrer que $\{\cos(\ln(n)),\ n \in \mathbf{N}^*\}$ est dense dans $[-1, 1]$

Exercice 23 (***)
Soit A une partie non vide de $\mathbf{R}$.

1) On suppose que
$$\forall (a, b) \in A^2,\ \frac{a+b}{2} \in A.$$
Montrer que A est dense dans $]\inf A, \sup A[$.

2) On suppose $A \subset \mathbf{R}_+^*$ tel que
$$\forall (a, b) \in A^2,\ \sqrt{ab} \in A.$$
Montrer que A est dense dans $]\inf A, \sup A[$.

7 Entraînement

Exercice 24 (**)
Montrer qu'une suite de $\mathbf{Z}^{\mathbf{N}}$ converge si, et seulement si elle est stationnaire.

Exercice 25 (**)
Soit la suite harmonique $(H_n)_{n\geqslant 1}$ définie pour tout $n \geqslant 1$ par $H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

1) Étudier la nature de la suite extraite (H_{2^n}).

2) En déduire la nature de (H_n) et son éventuelle limite.

Exercice 26 (**)
Soit une suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ définie par $u_0 > 0$ et

$$\forall n \in \mathbf{N},\ u_{n+1} = \sqrt{u_0 + u_1 + \cdots + u_n}.$$

Montrer que la suite diverge vers $+\infty$.

Exercice 27 (**)
Soient a et b deux réels positifs. Soient u et v les suites initialisées par $u_0 = a$ et $v_0 = b$ et définies par la récurrence : $\forall n \geqslant 0 \quad u_{n+1} = \sqrt{u_n v_n} \quad$ et $\quad v_{n+1} = \frac{u_n+v_n}{2}$.

1) (a) Montrer que u et v sont bien définies, puis que :

$$\forall n \geqslant 1 \quad u_n \leqslant v_n.$$

(b) Montrer que u et v sont convergentes et ont la même limite que l'on note $M(a,b)$.

2) (a) Calculer $M(0,1)$ et $M(1,1)$.

(b) Montrer que $x \longmapsto M(1,x)$ est croissante sur $\mathbf{R}_+$.

Exercice 28 (**)
Montrer qu'une suite bornée converge si, et seulement si elle admet une unique valeur d'adhérence.
Montrer que c'est faux si la suite n'est pas supposée bornée.

Exercice 29 (***)
Soit $x \in \mathbf{R}$.
Par densité de $\mathbf{Q}$ dans $\mathbf{R}$, il existe une suite $(x_n) \in \mathbf{Q}^{\mathbf{N}}$ telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = x$.
Pour tout $n \in \mathbf{N}$, on note $x_n = \frac{p_n}{q_n}$ avec $p_n \in \mathbf{Z}$ et $q_n \in \mathbf{N}^*$.
Montrer que si (q_n) est bornée, alors $x \in \mathbf{Q}$.

Exercice 30 (***) (Suites de Cauchy)
Soit $u \in \mathbf{C}^{\mathbf{N}}$.
On dit que u est une *suite de Cauchy* si

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbf{N},\ \forall p \geqslant n_0,\ \forall q \geqslant n_0,\ |u_p - u_q| \leqslant \varepsilon.$$

1) Montrer que u est convergente si, et seulement si u est une suite de Cauchy.

2) Soit $(a,\, b) \in \mathbf{R}$, $f\ : [a,\, b] \to [a,\, b]$ telle que

$$\exists c \in [0,\, 1[,\ \forall (x,\, y) \in [a,\, b]^2,\ |f(x) - f(y)| \leqslant c\,|x - y|\,.$$

On dit que f est contractante.
On admet qu'une fonction contractante est continue.

(a) Montrer que f admet au plus un point fixe.

(b) Soit $u_0 \in [a,\, b]$ et $\forall n \in \mathbf{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.
Montrer que la suite est de Cauchy.

(c) En déduire que f admet un unique point fixe sur $[a,\, b]$.
(théorème du point fixe de Picard)

(d) Discuter de la validité de ce résultat si on choisit un intervalle autre qu'un segment.

Exercice 31 (***) (Irrationnalité de e)

$$\forall n \in \mathbf{N}^*, \quad u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \qquad \text{et} \qquad v_n = u_n + \frac{1}{nn!}.$$

1) Montrer que (u_n) et (v_n) ont une limite commune.

2) On admet que cette limite est $\mathrm{e} = \exp(1)$. Montrer que e est irrationnel.
Indication : Poser par l'absurde $\mathrm{e} = \frac{p}{q}$, et comparer avec u_q et v_q.

Exercice 32 (***)
Soit (u_n) une suite à valeurs positives telle que

$$\forall (p,q) \in \mathbf{N}^2, \quad u_{p+q} \leqslant u_p + u_q.$$

1) Justifier que $\inf_{n\in\mathbf{N}^*} \frac{u_n}{n}$ existe.

2) Montrer que la suite $\left(\frac{u_n}{n}\right)_{n>0}$ converge et que

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{n} = \inf_{n\in\mathbf{N}^*} \frac{u_n}{n}.$$

On pourra pour $q \in \mathbf{N}^*$ fixé et $n \geqslant q$, écrire $n = kq + r$ avec $r \in [\![0,\, q-1]\!]$.

Exercice 33 (***) (Césarò et l'escalier)

1) (*Césarò*)
Soit u une suite réelle qui converge vers $\ell \in \overline{\mathbf{R}}$. Montrer que

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} u_k = \ell.$$

Utiliser la définition quantifiée. On pourra commencer par le cas $\ell = 0$.

2) La réciproque est-elle vraie ?

3) Soit u une suite réelle telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{n+1} - u_n = \ell \in \overline{\mathbf{R}}$.
Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{u_n}{n} = \ell$.

4) Soit u_n une suite réelle qui converge vers $\ell \in \overline{\mathbf{R}}$.
On considère une suite α strictement positive telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_k = +\infty$.
Montrer que

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_k u_k}{\sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_k} = \ell.$$

Exercice 34 (CCINP 43)
Soit $x_0 \in \mathbf{R}$.
On définit la suite (u_n) par $u_0 = x_0$ et, $\forall n \in \mathbf{N}$, $u_{n+1} = \mathrm{Arctan}(u_n)$.

1) (a) Démontrer que la suite (u_n) est monotone et déterminer, en fonction de la valeur de x_0, le sens de variation de (u_n).
   (b) Montrer que (u_n) converge et déterminer sa limite.

2) Déterminer l'ensemble des fonctions h, continues sur $\mathbf{R}$, telles que :

$$\forall x \in \mathbf{R},\ h(x) = h\left(\mathrm{Arctan}\, x\right).$$