

SUITES NUMÉRIQUES - RELATIONS DE COMPARAISON

On ne s'intéresse pas encore aux suites définies implicitement.

1 POUR COMMENCER...

Exercice 1

Classer les suites, dont les termes généraux sont les suivants, par ordre de négligeabilité :

$$1) \quad \frac{1}{n}, \frac{1}{n^2}, \frac{\ln n}{n}, \frac{\ln n}{n^2}, \frac{1}{n \ln n} \qquad 2) \quad n, n^2, n \ln n, \sqrt{n} \ln n, \frac{n^2}{\ln n}$$

Exercice 2 (Vrai-Faux)

Dire pour chaque proposition si elle est vraie ou fausse. Le démontrer.

- 1) Si $u_n \sim v_n$ alors pour toute application f définie sur $\mathbf{R}$, $f(u_n) \sim f(v_n)$,
- 2) Si $u_n = o(n)$ et $v_n = o(n)$, alors $(u_n - v_n) = o(0)$,
- 3) Si $u_n \sim \frac{1}{n}$ alors $u_n > 0$ à partir d'un certain rang,
- 4) Si $u_n \sim v_n$ alors $u_n - v_n$ tend vers 0,
- 5) Si $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n - v_n) = 0$ et si (v_n) ne s'annule pas alors $u_n \sim v_n$.

Exercice 3 (*)

Montrer que $n! = o(n^n)$ de deux façons différentes.

Exercice 4 (*) (à connaître)

Calculer

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^m, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \lim_{m \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^m \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n.$$

Exercice 5 (**) (passage au logarithme)

Soient (u_n) et (v_n) deux suites strictement positives telles que $u_n \sim v_n$.

- 1) Montrer que si $u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \ell \in [0, 1[\cup]1, +\infty[\cup \{+\infty\}]$, alors $\ln(u_n) \sim \ln(v_n)$.
- 2) Si $u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 1$, trouver un exemple pour lequel l'équivalent ne passe pas au logarithme.

2 CALCULS

Exercice 6 (*)

Donner la nature de la suite, et sa limite éventuelle

$$1) \quad \forall n \in \mathbf{N}^*, u_n = \frac{(-2)^n}{n^2}. \qquad 2) \quad \forall n \in \mathbf{N}^*, u_n = \frac{\ln n}{n}.$$

Exercice 7 (*)

Donner un équivalent simple :

- 1) $\forall n \in \mathbf{N}^*, u_n = \frac{1}{n} \sin \frac{1}{n}.$
- 2) $\forall n \in \mathbf{N}^*, u_n = \frac{3n^2 - 2n + 1}{n\sqrt{n} + n - 1}.$
- 3) $\forall n \in \mathbf{N}^*, u_n = \frac{3n^2 - 2n + 1}{n^6 - 2n^4 - 9}.$
- 4) $\forall n \in \mathbf{N}^*, u_n = \frac{n^3 + 5n}{5n^3 + \cos(n) + \frac{1}{n^2}}.$
- 5) $\forall n \in \mathbf{N}, u_n = \sqrt{1 + n^2} - \sqrt{1 + n}.$
- 6) $\forall n \in \mathbf{N}^*, u_n = \sqrt{n^2 + 1} - \sqrt{n^2 - 1}.$
- 7) $\forall n \in \mathbf{N}^*, u_n = \frac{\sqrt{(n+1)(n+3)} + \sqrt{n}}{n}.$
- 8) $\forall n \in \mathbf{N}, u_n = n - \sqrt{(n+1)(n+3)} - \sqrt{n}.$

Exercice 8 (*)

Trouver un équivalent simple et la limite éventuelle :

$$1) \quad u_n = \frac{2n^2 + n \ln^2 n}{n^2 \ln n + \sqrt{n}}. \qquad 2) \quad u_n = \frac{n + e^n}{2n + 3^n}. \qquad 3) \quad u_n = e^n + n^e.$$

Exercice 9 ()**

Trouver un équivalent simple et la limite éventuelle :

- 1) $u_n = \sqrt{n+1} + \sqrt{n}$.
- 2) $u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$.
- 3) $u_n = \sqrt[3]{n^3+1} - n$.
- 4) $u_n = \sqrt{n + \sqrt{n+1}} - \sqrt{n - \sqrt{n+1}}$.
- 5) $u_n = \frac{\ln(n+1) - \ln n}{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}$.
- 6) $u_n = (n+1)^{n+1} - n^n$.

Exercice 10 (*)

Trouver un équivalent simple :

- 1) $u_n = \sin \frac{1}{n} - \tan \frac{1}{n}$.
- 2) $u_n = \frac{\sin \frac{1}{n}}{e^{\frac{1}{n}} - 1}$.

Exercice 11 ()**

Soit $k \in \mathbf{N}^*$ et $x \in]0, 1[$ fixés.

- 1) Montrer que $\binom{n}{k} \sim \frac{n^k}{k!}$
- 2) En déduire que la suite $\left(\binom{n}{k} x^n \right)_{n \in \mathbf{N}^*}$ admet une limite quand $n \rightarrow +\infty$, et donner la valeur de cette limite.

3 ENTRAÎNEMENT**Exercice 12 (**)**

Montrer que

$$\sum_{k=1}^n k! \sim n!.$$

Exercice 13 ()**

Soit (u_n) une suite décroissante telle que

$$u_n + u_{n+1} \sim \frac{1}{n}.$$

- 1) Montrer que (u_n) converge vers 0^+ .
- 2) Donner un équivalent simple de u_n en $+\infty$.
- 3) Montrer à l'aide d'un contre-exemple que si (u_n) n'est pas supposée décroissante, mais positive convergente vers 0, alors l'équivalent simple trouvé précédemment n'est pas toujours valable.

Exercice 14 (*)**

Soit (u_n) la suite définie par

$$u_0 > 0 \text{ et } \forall n \in \mathbf{N}, \quad u_{n+1} = u_n e^{-u_n}.$$

- 1) Montrer que (u_n) converge vers 0.
- 2) Montrer que $u_{n+1} = u_n - u_n^2 + o(u_n^2)$.
- 3) Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{u_n} - \frac{1}{u_{n+1}} = -1$.
- 4) En déduire¹ que $u_n \sim \frac{1}{n}$.

¹Penser à Césaro.