Systèmes linéaires

1 Systèmes simples

Exercice 1 (*)
Résoudre les systèmes suivants et interpréter géométriquement les solutions :

1. $\begin{cases} x+y+z &= 0 \\ x-y+z &= 0 \\ x+y-z &= 0 \end{cases}$

2. $\begin{cases} x+y+z &= 1 \\ x-y+z &= 2 \\ x+y-z &= 3 \end{cases}$

3. $\begin{cases} x+2y &= 1 \\ 2x+2y+z &= 2 \\ x+y-z &= 1 \end{cases}$

4. $\begin{cases} x+2y &= 1 \\ x+2y+z &= 2 \\ 2x+4y+z &= 3 \end{cases}$

5. $\begin{cases} x+2y+z &= 2 \\ 2x+4y+2z &= 1 \\ 2x+4y+z &= 3 \end{cases}$

Exercice 2 (*)
Dans une ferme on élève des lapins et des poulets. Il y au total 27 animaux et 72 pattes d'animaux. Combien de lapins et combien de poulets sont dans la ferme ?

Exercice 3
Résoudre les systèmes suivants et interpréter géométriquement les solutions :

1. $\begin{cases} x_1-x_2+2x_3+3x_4+x_5 &= 0 \\ 2x_1+x_2+x_3-2x_4 &= 0 \\ 4x_1+5x_2-x_3-2x_5 &= 0 \end{cases}$

2. $\begin{cases} x_1-x_2-x_3 &= 1 \\ x_1+x_2 &= 3 \\ x_1+x_3 &= 3 \end{cases}$

Exercice 4 (*)
Trouver la forme échelonnée réduite en ligne, donner son rang puis donner l'espace des solutions du système homogène associé.

1. $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 1 & 3 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$

2. $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & -2 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & -3 & 3 \end{pmatrix}$

3. $\begin{pmatrix} 0 & 2 & -2 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & -2 & 3 & 0 \\ 2 & 4 & -3 & 6 & 4 \\ 1 & 1 & -1 & 4 & 6 \end{pmatrix}$

4. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & -3 & -2 & 2 \\ -1 & -3 & -2 & -2 \\ 3 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

Exercice 5 (*)
Pour chaque matrice de l'exercice précédent, donner les solutions s'il s'agit d'une matrice augmentée.

2 Systèmes à paramètres

Exercice 6 (**) (Existence de solutions ?)
Étudier l'existence de solutions des systèmes en fonction des valeurs des paramètres réels m, a et b :

1. $\begin{cases} x + y + (1-m)z = m+2 \\ (1+m)x - y + 2z = 0 \\ 2x - my + 3z = m+2 \end{cases}$

2. $\begin{cases} ax + by + z = 1 \\ x + aby + z = b \\ x + by + az = 1 \end{cases}$

3 Applications linéaires

Exercice 7 (**)
Pour chaque application, étudier si elle est injective/surjective/bijective ?
En cas de bijectivité, donner son application réciproque.

1. $f : \begin{cases} \mathbf{R}^2 & \to \mathbf{R}^2 \\ (x,y) & \mapsto (2x, 3x-y) \end{cases}$

2. $f : \begin{cases} \mathbf{R}^2 & \to \mathbf{R}^3 \\ (x,y) & \mapsto (x+y, x-y, 2x+y) \end{cases}$

3. $f : \begin{cases} \mathbf{R}^3 & \to \mathbf{R}^3 \\ (x,y,z) & \mapsto (x+y+z, x+y, x-z) \end{cases}$

4. $f : \begin{cases} \mathbf{R}^3 & \to \mathbf{R}^2 \\ (x,y,z) & \mapsto (x+y+z, -y+3z) \end{cases}$

Exercice 8 (**)
Soit $\lambda \in \mathbf{R}$, on définit

$$f : \begin{cases} \mathbf{R}^2 & \to \mathbf{R}^2 \\ (x,y) & \mapsto (\lambda x + y, x + 2\lambda y) \end{cases}$$

Donner une condition nécessaire et suffisante sur λ pour que f soit bijective.

4 Approfondissement

Exercice 9 (**)
Résoudre le système d'équations suivant :

$$\left\{\begin{array}{ccccccccccc} x_1 & + & x_2 & + & x_3 & + & ... & + & x_n & = & 1 \\ x_1 & + & 2x_2 & + & 2x_3 & + & ... & + & 2x_n & = & 1 \\ x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & + & ... & + & 3x_n & = & 1 \\ & & & & \vdots & & \vdots & & & & \vdots \\ x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & + & ... & + & nx_n & = & 1 \end{array}\right.$$