Systèmes linéaires

1 Systèmes simples

Exercice 1 (*)
Résoudre le système d'équations :

$$(S)\ :\ \left\{\begin{array}{ccccccc} x_1 & +2x_2 & & & +5x_5 & = 0 \\ & & x_3 & & -2x_5 & = 0 \\ & & & x_4 & +x_5 & = 0 \end{array}\right.$$

Exercice 2 (*)

1) Résoudre le système linéaire suivant.

$$\left\{\begin{array}{ccccc} & -3y & & +t & = 0 \\ x & +5y & +2z & -t & = 0 \\ 3x & +y & +3z & -3t & = 0 \end{array}\right.$$

2) Sans calculs supplémentaires, résoudre

$$\left\{\begin{array}{cccc} & -3y & & = 1 \\ x & +5y & +2z & = -1 \\ 3x & +y & +3z & = -3 \end{array}\right.$$

Exercice 3 (*)
Résoudre les systèmes suivants et interpréter géométriquement les solutions :

1) $\left\{\begin{array}{ll} x+2y+z & = 2 \\ 2x+4y+2z & = 1 \\ 2x+4y+z & = 3 \end{array}\right.$

2) $\left\{\begin{array}{ll} x+y+z & = 0 \\ x-y+z & = 0 \\ x+y-z & = 0 \end{array}\right.$

3) $\left\{\begin{array}{ll} x-y-2z & = 1 \\ x+2y-z & = 3 \\ -x+4y+3z & = 1 \end{array}\right.$

4) $\left\{\begin{array}{ll} x+y+z & = 1 \\ x-y+z & = 2 \\ x+y-z & = 3 \end{array}\right.$

5) $\left\{\begin{array}{ll} x+2y+4z & = 1 \\ 2x+2y+z & = 2 \\ x+y-z & = 1 \end{array}\right.$

6) $\left\{\begin{array}{ll} x+2y-z & = 1 \\ x+2y+z & = 2 \\ 2x+4y+z & = 3 \end{array}\right.$

Exercice 4 (*)
Résoudre et interpréter géométriquement les solutions :

1) $\left\{\begin{array}{cccccc} & 2x_2 & -2x_3 & +3x_4 & +x_5 & = 0 \\ x_1 & +3x_2 & -2x_3 & +3x_4 & & = 0 \\ 2x_1 & +4x_2 & -3x_3 & +6x_4 & +4x_5 & = 0 \\ x_1 & +x_2 & -x_3 & +4x_4 & +6x_5 & = 0 \end{array}\right.$

2) $\left\{\begin{array}{ccccc} x_1 & +x_2 & +x_3 & +x_4 & = 0 \\ 2x_1 & -3x_2 & -2x_3 & +2x_4 & = 0 \\ -x_1 & -3x_2 & -2x_3 & -2x_4 & = 0 \\ 3x_1 & +x_2 & -x_3 & & = 0 \end{array}\right.$

Exercice 5 (*)
Trouver toutes les fonctions polynomiales f du second degré dont la courbe passe par le point $(-\frac{1}{2}, 3)$ et telles que

$$f'\left(-\frac{1}{2}\right) = -3.$$

Exercice 6 (**)
Résoudre le système d'équations suivant :

$$\left\{\begin{array}{ccccccccccc} x_1 & + & x_2 & + & x_3 & + & ... & + & x_n & = & 1 \\ x_1 & + & 2x_2 & + & 2x_3 & + & ... & + & 2x_n & = & 1 \\ x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & + & ... & + & 3x_n & = & 1 \\ & & & & \vdots & & \vdots & & & & \vdots \\ x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & + & ... & + & nx_n & = & 1 \end{array}\right.$$

2 Systèmes à paramètres

Exercice 7 (**)
Décrire la nature géométrique de l'espace des solutions en fonction de la valeur du paramètre m.
Donner l'ensemble des solutions lorsque ce n'est pas un singleton.

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} x & - & my & + & m^2z & = & m \\ mx & - & m^2y & + & mz & = & 1 \\ mx & + & y & - & m^3z & = & -1. \end{array}\right.$$

Exercice 8 (**)
Étudier l'existence de solutions des systèmes en fonction des valeurs des paramètres réels m, a et b :

1) $\left\{\begin{array}{ccccccc} x & + & y & + & (1-m)z & = & m+2 \\ (1+m)x & - & y & + & 2z & = & 0 \\ 2x & - & my & + & 3z & = & m+2 \end{array}\right.$

2) $\left\{\begin{array}{ccccccc} ax & + & by & + & z & = & 1 \\ x & + & aby & + & z & = & b \\ x & + & by & + & az & = & 1 \end{array}\right.$

Exercice 9 (**) (Polygone)
$A_1, A_2, \cdots A_n$ désignent des points du plan complexes d'affixes $a_1, a_2, \cdots, a_n$.
On cherche une condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe un polygone de sommets $M_1, M_2, \cdots, M_n$ dont les milieux sont les points A_i :
On note z_i l'affixe de M_i.
On pose A_i milieu de $[M_i, M_{i+1}]$ avec la convention $M_{n+1} = M_1$.

1) Écrire la condition d'existence sous la forme d'un système à coefficients entiers.
2) Montrer que si n impair, alors il existe une unique solution.
3) Montrer que si n est pair, il y a soit une infinité, soit 0 solutions.
(***) Donner la condition d'existence.
4) *Géométrie* : placer 3 points A_1, A_2 et A_3 quelconques dans le plan puis construire le polygone M_1, M_2, M_3.

3 Applications linéaires

Exercice 10 (**)
Pour chaque application, étudier si elle est injective/surjective/bijective ?
En cas de bijectivité, donner son application réciproque.

1) $f : \begin{cases} \mathbf{R}^2 & \to \mathbf{R}^2 \\ (x,y) & \mapsto (2x, 3x-y) \end{cases}$

2) $f : \begin{cases} \mathbf{R}^2 & \to \mathbf{R}^3 \\ (x,y) & \mapsto (x+y, x-y, 2x+y) \end{cases}$

3) $f : \begin{cases} \mathbf{R}^3 & \to \mathbf{R}^3 \\ (x,y,z) & \mapsto (x+y+z, x+y, x-z) \end{cases}$

4) $f : \begin{cases} \mathbf{R}^3 & \to \mathbf{R}^2 \\ (x,y,z) & \mapsto (x+y+z, -y+3z) \end{cases}$

Exercice 11 (**)
Soit $\lambda \in \mathbf{R}$, on définit

$$f : \begin{cases} \mathbf{R}^2 & \to \mathbf{R}^2 \\ (x,y) & \mapsto (\lambda x + y, x + 2\lambda y) \end{cases}.$$

Donner une condition nécessaire et suffisante sur λ pour que f soit bijective.