

# SYSTÈMES LINÉAIRES ET APPLICATIONS LINÉAIRES

## 1 SYSTÈMES SIMPLES

### Exercice 1 (\*)

Résoudre le système d'équations :

$$(S) : \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 5x_5 = 0 \\ x_3 - 2x_5 = 0 \\ x_4 + x_5 = 0 \end{cases}$$

### Exercice 2 (\*)

1. Résoudre le système linéaire suivant.

$$\begin{cases} -3y + t = 0 \\ x + 5y + 2z - t = 0 \\ 3x + y + 3z - 3t = 0 \end{cases}$$

2. Sans calculs supplémentaires, résoudre

$$\begin{cases} -3y = 1 \\ x + 5y + 2z = -1 \\ 3x + y + 3z = -3 \end{cases}$$

### Exercice 3 (\*)

Résoudre les systèmes suivants et interpréter géométriquement les solutions :

$$1. \begin{cases} x + y + z = 0 \\ x - y + z = 0 \\ x + y - z = 0 \end{cases}$$

$$2. \begin{cases} x + y + z = 1 \\ x - y + z = 2 \\ x + y - z = 3 \end{cases}$$

$$3. \begin{cases} x + 2y + 4z = 1 \\ 2x + 2y + z = 2 \\ x + y - z = 1 \end{cases}$$

$$4. \begin{cases} x + 2y - z = 1 \\ x + 2y + z = 2 \\ 2x + 4y + z = 3 \end{cases}$$

$$5. \begin{cases} x + 2y + z = 2 \\ 2x + 4y + 2z = 1 \\ 2x + 4y + z = 3 \end{cases}$$

### Exercice 4 (\*)

Résoudre et interpréter géométriquement les solutions :

$$1. \begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 = 1 \\ x_1 + x_2 + 4x_3 = 3 \\ x_1 + x_3 = 3 \end{cases}$$

$$2. \begin{cases} 2x_2 - 2x_3 + 3x_4 + x_5 = 0 \\ x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 0 \\ 2x_1 + 4x_2 - 3x_3 + 6x_4 + 4x_5 = 0 \\ x_1 + x_2 - x_3 + 4x_4 + 6x_5 = 0 \end{cases}$$

$$3. \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ 2x_1 - 3x_2 - 2x_3 + 2x_4 = 0 \\ -x_1 - 3x_2 - 2x_3 - 2x_4 = 0 \\ 3x_1 + x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$$

## 2 SYSTÈMES À PARAMÈTRES

### Exercice 5 (\*\*) (Existence de solutions ?)

Étudier l'existence de solutions des systèmes en fonction des valeurs des paramètres réels  $m$ ,  $a$  et  $b$  :

$$1. \begin{cases} x + y + (1-m)z = m+2 \\ (1+m)x - y + 2z = 0 \\ 2x - my + 3z = m+2 \end{cases}$$

$$2. \begin{cases} ax + by + z = 1 \\ x + aby + z = b \\ x + by + az = 1 \end{cases}$$

## 3 APPLICATIONS LINÉAIRES

### Exercice 6 (\*\*)

Pour chaque application, étudier si elle est injective/surjective/bijective ?

En cas de bijectivité, donner son application réciproque.

$$1. f : \begin{cases} \mathbf{R}^2 & \rightarrow \mathbf{R}^2 \\ (x, y) & \mapsto (2x, 3x - y) \end{cases}$$

$$2. f : \begin{cases} \mathbf{R}^2 & \rightarrow \mathbf{R}^3 \\ (x, y) & \mapsto (x + y, x - y, 2x + y) \end{cases}$$

$$3. f : \begin{cases} \mathbf{R}^3 & \rightarrow \mathbf{R}^3 \\ (x, y, z) & \mapsto (x + y + z, x + y, x - z) \end{cases}$$

$$4. f : \begin{cases} \mathbf{R}^3 & \rightarrow \mathbf{R}^2 \\ (x, y, z) & \mapsto (x + y + z, -y + 3z) \end{cases}$$

### Exercice 7 (\*\*)

Soit  $\lambda \in \mathbf{R}$ , on définit

$$f : \begin{cases} \mathbf{R}^2 & \rightarrow \mathbf{R}^2 \\ (x, y) & \mapsto (\lambda x + y, x + 2\lambda y) \end{cases}$$

Donner une condition nécessaire et suffisante sur  $\lambda$  pour que  $f$  soit bijective.

## 4 APPROFONDISSEMENT

### Exercice 8 (\*\*)

Résoudre le système d'équations suivant :

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n = 1 \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 + \dots + 2x_n = 1 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + \dots + 3x_n = 1 \\ \vdots \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + \dots + nx_n = 1 \end{cases}$$