# Espaces vectoriels en dimension finie

**Exercice 1**
**Définitions et notations :**

- Soit $E$ un $\mathbf{R}$-espace vectoriel de dimension finie $n \geqslant 1$. On note $\mathscr{L}(E)$ l'ensemble des endomorphismes de $E$ et $\mathrm{GL}(E)$ l'ensemble des endomorphismes bijectifs de $E$ (automorphismes).
- Un polynôme non nul de $\mathbf{R}[X]$ est dit *unitaire* si son coefficient dominant (c'est-à-dire le coefficient du terme de plus haut degré) vaut 1.
- Étant donné un polynôme $P \in \mathbf{R}[X]$, s'écrivant $P = \sum_{k=0}^{d} a_k X^k$, on pose

$$P(f) = \sum_{k=0}^{d} a_k f^k \qquad \text{où} \quad f^k = f \circ f^{k-1} \text{ si } k \geqslant 1 \text{ et } f^0 = \mathrm{Id}.$$

  Par exemple, si $\lambda \in \mathbf{R}$ et $P(x) = x - \lambda$, alors $P(f) = f - \lambda \mathrm{Id}$.
  On admettra que, si $P(X) = Q(X)R(X)$, alors $P(f) = Q(f) \circ R(f) = R(f) \circ Q(f)$.

- Un endomorphisme $f \in \mathscr{L}(E)$ est dit *cyclique* s'il existe un entier naturel non nul $p$ et un vecteur $a \in E$ tels que :

$$\mathscr{C}_a^p = \left\{a, f(a), f^2(a), \cdots, f^{p-1}(a)\right\}$$

  soit une partie génératrice de $E$ de cardinal $p$, stable par $f$, autrement dit, vérifie les trois propriétés suivantes :

  **1)** $\mathscr{C}_a^p$ possède $p$ éléments deux à deux distincts ;
  **2)** $f\left(\mathscr{C}_a^p\right) \subset \mathscr{C}_a^p$, c'est-à-dire : pour tout $j \in [\![1, p]\!]$, $f^j(a)$ est un élément de $\mathscr{C}_a^p$ ;
  **3)** $\mathrm{Vect}\left(C_a^p\right) = E$, c'est-à-dire : le sous-espace vectoriel engendré par $\mathscr{C}_a^p$ est égal à $E$.

  Un telle partie $\mathscr{C}_a^p$ est appelée *cycle* de $f$ et on dit alors que $f$ est *cyclique d'ordre* $p$.

L'objet du problème est l'étude de quelques exemples et propriétés des endomorphismes cycliques.

**Partie 1**

**1)** Soit $f \in \mathscr{L}(E)$ cyclique d'ordre $p$ ; on rappelle que $n = \dim E$.

   **(a)** Justifier que $p \geqslant n$.
   **(b)** Montrer que si $\{x_1, \cdots, x_p\}$ est une famille génératrice d'un espace de dimension $n$, alors le rang de toute famille extraite à $p-1$ éléments est au moins égal à $n-1$.
   **(c)** En déduire que $f$ est de rang au moins $n-1$.

**2)** On considère $\mathscr{B} = (e_1, \cdots, e_n)$ la base canonique de $\mathbf{R}^n$.

   **(a)** Soit $f$ l'endomorphisme de $\mathbf{R}^n$ dont la matrice dans la base canonique $\mathscr{B}$ est

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 1 & \ddots & & & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

   Montrer que $f$ est cyclique est expliciter un cycle de $f$. Déterminer le rang de $f$.

   **(b)** Mêmes questions avec l'endomorphisme $g$ de $\mathbf{R}^n$, de matrice dans la base canonique $\mathscr{B}$,

$$B = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 & -1 \\ 1 & \ddots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & -1 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

**Partie 2** Soit $f \in \mathscr{L}(E)$ un endomorphisme cyclique et $\mathscr{C}_a^p$ un cycle de $f$.

**3)** Soit $m$ le plus grand entier tel que la famille

$$\mathscr{F} = \left\{a, f(a), \cdots, f^{m-1}(a)\right\}$$

soit libre.

**(a)** Prouver que, pour $k \geqslant m$, $f^k(a) \in \operatorname{Vect}(\mathscr{F})$.

**(b)** En déduire que la famille

$$\mathscr{B} = \left\{a, f(a), \cdots, f^{n-1}(a)\right\}$$

est une base de $E$.

**4)** Prouver que si $[P(f)](a) = 0$ alors $P(f) = 0$.

*Dans toute la suite du problème, on suppse que* $f \in \mathrm{GL}(E)$.

**5)** **(a)** Montrer que, si $\mathscr{C}_a^p$ est un cycle de $f$, on a $f^p(a) = a$.

**(b)** Prouver que $f^p = \mathrm{Id}$.

**6)** **(a)** Montrer qu'il existe une base de $E$ dans laquelle la matrice de $f$ s'écrit

$$M = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 & -\alpha_0 \\ 1 & \ddots & & \vdots & -\alpha_1 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & -\alpha_{n-1} \end{pmatrix}$$

**(b)** En déduire l'existence d'un unique polynôme unitaire $T$ de degré $n$ tel que $T(f) = 0$.

**(c)** Prouver qu'il n'existe pas de polynôme non nul $P \in \mathbf{R}[X]$ tel que $\deg P < n$ et $P(f) = 0$.