Variables aléatoires sur un univers fini - TD-1

Présentation des exercices :

- L'exercice 1 utilise des méthodes très classiques.
- L'exercice 2 est assez facile.
- L'exercice 3 est plus difficile.

Exercice 1 (Urne modifiée)
Une urne contient R boules rouges et B boules blanches avec $R \geqslant 1$ et $B \geqslant 1$. On pose $N = R + B$. On effectue une suite de tirages au hasard d'une boule de cette urne selon le processus suivant:

- lorsqu'on tire une boule rouge, celle-ci est enlevée de l'urne et remplacée par une boule blanche, avant de passer au tirage suivant.
- lorsqu'on tire une boule blanche, celle-ci est enlevée de l'urne et remplacée par une boule rouge, avant de passer au tirage suivant.

Pour tout entier $n \in \mathbf{N}^*$ on note A_n l'événement « on tire une boule rouge au n-ième tirage ».
Soit R_n la variable aléatoire représentant le nombre de boules rouges contenues dans l'urne à l'issue du n-ième tirage.
On pose R_0 la variable aléatoire certaine égale à R.

1) **(a)** Soit $(n,k) \in \mathbf{N}^2$, déterminer la probabilité conditionnelle $\mathbf{P}\left(A_{n+1} | R_n = k\right)$.
(b) En déduire $\mathbf{P}\left(A_{n+1}\right)$ en fonction de l'espérance $\mathbf{E}(R_n)$.

2) **(a)** Soit X_{n+1} la variable qui vaut -1 si l'événement A_{n+1} est réalisé et 1 sinon.
Exprimer R_{n+1} en fonction de R_n et X_{n+1}.
(b) En déduire une relation de récurrence sur la suite $(\mathbf{E}(R_n))_{n \in \mathbf{N}^*}$.
(c) Exprimer $\mathbf{E}(R_n)$ en fonction de n, de R et de N.

Exercice 2 (Nombre moyens de piles successifs dans une suite de lancers)
On désigne par n un entier naturel non nul.
On lance n fois une pièce de monnaie donnant « pile » avec la probabilité p (avec $0 < p < 1$) et « face » avec la probabilité $q = 1 - p$.
On appelle k-chaîne de « pile » une suite de k lancers consécutifs ayant tous donné « pile », cette suite pouvant être précédée d'un « face » ou débuter le tirage ; et suivie d'une « face » ou être la dernière suite du tirage.
Pour tout k de $[\![1, n]\!]$, on note Y_k la variable aléatoire égale au nombre de k-chaînes de « pile » obtenues au cours des n lancers.
Pour tout k de $[\![1, n]\!]$, on note P_k l'événement "on obtient « pile » au k-ième lancer".
Par exemple, avec $n = 11$ si on a obtenu le tirage $P_1\, P_2\, F_3\, F_4\, P_5\, P_6\, P_7\, F_8\, P_9\, F_{10}\, P_{11}$, alors $Y_1 = 2$, $Y_2 = 1$, $Y_3 = 1$ et pour tout $k \geqslant 4$, $Y_k = 0$.
Le but de cet exercice est de déterminer, pour tout k de $[\![1, n]\!]$ l'espérance de Y_k, notée $\mathbf{E}\left(Y_k\right)$.
On suppose que les différents lancers sont indépendants les uns des autres.

1) Déterminer la loi de Y_n et donner $\mathbf{E}\left(Y_n\right)$.

2) Montrer que $\mathbf{P}\left(Y_{n-1} = 1\right) = 2qp^{n-1}$ et donner $\mathbf{E}\left(Y_{n-1}\right)$.

3) Dans cette question k désigne un entier de $[\![1, n-2]\!]$.

Pour tout i de $[\![1, n]\!]$, on note $X_{i,k}$ la variable aléatoire qui vaut 1 si une k-chaîne de « pile » commence au i-ème lancer, et qui vaut 0 sinon.

(a) Calculer $\mathbf{P}\left(X_{1,k} = 1\right)$.
(b) Pour $i \in [\![2, n-k]\!]$, montrer que $\mathbf{P}\left(X_{i,k} = 1\right) = q^2 p^k$.
(c) Montrer que $\mathbf{P}\left(X_{n-k+1,k} = 1\right) = qp^k$.
(d) Exprimer Y_k en fonction des variables $X_{i,k}$, puis déterminer $\mathbf{E}\left(Y_k\right)$.

Exercice 3 (ENS BL 2001)
On jette au hasard r jetons dans n boîtes ($n \geqslant 3$) de la façon suivante : chaque jeton a la même probabilité de tomber dans chacune des boîtes et on suppose que les jetons sont lancés indépendamment les uns des autres.

1) *Question préalable :* Montrer que $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln(1+x)}{x} = 1$. En déduire $\lim\limits_{x \to +\infty} x \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)$.

2) Soit A_i l'événement « la i-ème boîte n'a pas reçu de jetons ». Calculer $\mathbf{P}(A_i)$.

3) Soit N_n le nombre de boîtes n'ayant pas reçu de jeton. Calculer $\mathbf{E}(N_n)$ (on pourra exprimer N_n en fonction des variables $\mathbf{1}_{A_i}$ pour $i \in \{1, \cdots, n\}$ où $\mathbf{1}_{A_i}$ prend ses valeurs dans $\{0, 1\}$ et vaut 1 si et seulement si l'événement A_i est réalisé).

4) Calculer $\mathbf{P}(A_i \cap A_j)$ pour tout $(i, j) \in \{1, \cdots, n\}^2$ puis calculer $\mathbf{E}\left(N_n^2\right)$. En déduire la variance $\mathbf{V}(N_n)$ de N_n.

5) On considère ici un nombre variable n de boîtes et l'on fait dépendre r de n (on notera alors $r = r_n$). On suppose qu'il existe $c \in \mathbf{R}$ tel que $r_n/n \to c$ lorsque n tend vers l'infini.

- **(a)** Calculer la limite $\mathbf{E}(N_n/n)$ lorsque n tend vers l'infini.
- **(b)** Calculer la limite $\mathbf{V}(N_n/n)$ lorsque n tend vers l'infini.
- **(c)** Soit $\varepsilon > 0$. Montrer que $\varepsilon^2 \mathbf{1}_{|N_n/n - \mathbf{E}(N_n/n)| \geqslant \varepsilon} \leqslant (N_n/n - \mathbf{E}(N_n/n))^2$.
  En déduire que $\mathbf{P}(|N_n/n - \mathbf{E}(N_n/n)| \geqslant \varepsilon) \to 0$ lorsque n tend vers l'infini. Quelle est la signification de ce résultat ?