Variables aléatoires - 2

Problème 1 (Ecricom E 2002 modifié)
Une urne contient initialement 1 boule blanche et 1 boule noire.
On effectue n tirages successifs dans cette urne avec $n \geqslant 1$.
À chaque tirage, on note la couleur de la boule obtenue et on la replace dans l'urne, en y ajoutant c autres de la même couleur que celle tirée.

Partie 1 : Modélisation informatique
Une variable globale `c`, désigne, comme dans l'énoncé, le nombre de boules que l'on rajoute dans l'urne à chaque réponse, et `n` désigne le nombre de tirages.

```
c = 2
n = 20
```

1) Programmer une fonction **tirage()** qui renvoie le nombre de boules blanches tirées au cours de n tirages. *Indication (on pourra utiliser une autre méthode si on le souhaite) :*
On peut modéliser l'urne par une liste. Chaque élément de la liste représente une boule : 1 pour une boule blanche et 0 pour une boule noire. Ainsi, l'urne contiendra autant de 1 que de boules blanches et autant de 0 que de boules noires.

2) Programmer une fonction **proba(`k, nb`)** qui renvoie une valeur approchée de la probabilité que l'on tire exactement k boules blanches au cours des n tirages.
On estimera la valeur de la probabilité en effectuant l'expérience `nb` fois.

3) Programmer une fonction **esperance** qui donne une valeur approchée de l'espérance du nombre de boules blanches tirées.

Notations pour la suite :
On définit les variables aléatoires $(X_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ par :

$$\begin{cases} X_i = 1 & \text{si on obtient une boule blanche au } i\text{-ème tirage.} \\ X_i = 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

On note Y la variable aléatoire réelle définie par :

$$\begin{cases} Y = k & \text{si l'on obtient une boule blanche pour la première fois au } k\text{-ième tirage.} \\ Y = 0 & \text{si les } n \text{ boules tirées sont noires.} \end{cases}$$

Partie 2 : Cas $c = 0$
Dans cette partie,on suppose que $c = 0$. Ainsi, la couleur de la boule tirée à l'instant k n'influence pas sur la constitution de l'urne, et tout au long de l'expérience, l'urne possède exactement une boule blanche et une boule noire.
On effectue donc ici n tirages avec remise de la boule dans l'urne.
On note X la variable aléatoire réelle égale au nombre total de boules blanches obtenues au cours des n tirages.

4) Déterminer la loi de X. Donner la valeur de son espérance $\mathbf{E}(X)$ et de sa variance $\mathbf{V}(X)$.

5) Pour $k \in [\![1, n]\!]$, déterminer la probabilité $\mathbf{P}(Y = k)$.

6) Sans s'aider de la question précédente, déterminer la probabilité $\mathbf{P}(Y = 0)$, puis vérifier par le calcul que :

$$\sum_{k=0}^{n} \mathbf{P}(Y = k) = 1.$$

7) Pour $n \geqslant 1$ et $x \in]0, 1[$, calculer $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} kx^k$. *Indication :* s'aider d'un changement d'indice.

8) En déduire que

$$\mathbf{E}(Y) = 2 - \frac{n+2}{2^n}.$$

Partie 3 : Cas $c \geqslant 1$
On suppose désormais que $c \geqslant 1$. Ainsi, après chaque tirage, on remet la boule dans l'urne en y ajoutant c autres de la même couleur.
On considère pour $p \in [\![2, n]\!]$, la variable aléatoire Z_p, définie par :

$$Z_p = \sum_{i=1}^{p} X_i.$$

9) Que représente la variable Z_p ?

10) Donner l'univers image $Z_p(\Omega)$ de Z_p.

11) Donner la loi de X_1 et son espérance $\mathbf{E}(X_1)$.

12) Déterminer la loi de X_2 et son espérance $\mathbf{E}(X_2)$.

13) Déterminer la loi de probabilité de Z_2.
Indication : Calculer pour chaque $k \in Z_2(\Omega)$.

14) Soit $p \leqslant n-1$.

- **(a)** Déterminer $\mathbf{P}_{Z_p=k}(X_{p+1}=1)$ pour $k \in Z_p(\Omega)$.
- **(b)** En déduire que
$$\mathbf{P}(X_{p+1}=1) = \frac{1+c\mathbf{E}(Z_p)}{2+pc}.$$
- **(c)** En déduire que X_p est une variable aléatoire de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{2}$.
Indication : On raisonnera par récurrence forte sur p.

15) Interprétation

- **(a)** Quelle est la probabilité que l'on tire une boule blanche au k-ième tirage ?
- **(b)** Supposant que l'on ait obtenu 5 boules blanches au cours des 8 premiers tirages, quelle est la probabilité (en fonction de c) que l'on en tire une blanche au 9^e tirage ?
- **(c)** En supposant que l'on ait obtenue une boule blanche au n-ième tirage, quelle est la probabilité que l'on en ait tiré une blanche au premier tirage.
On ne demande pas le détail de tous les calculs.