TD - Complexes et trigonométrie

Exercice 1

1. Pour tout entier naturel n non nul , pour tout entier $k \in [|0, n-1|]$, montrer que :

$$\left| \mathrm{e}^{\frac{2ik\pi}{n}} - 1 \right| = 2 \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right).$$

2. En déduire , pour tout entier $n \in \mathbf{N}^*$, la valeur de la somme :

$$S_n = \sum_{k=0}^{n-1} \left| e^{\frac{2ik\pi}{n}} - 1 \right|.$$

Exercice 2 (Irrationalité)

1. (a) Démontrer que, pour tout $p \in \mathbf{N}$, il existe $(a_p, b_p) \in \mathbf{Z}^2$ tel que $(1 + i\,2\sqrt{2})^p = a_p + i\,b_p\sqrt{2}$.
   On précisera a_0 et b_0 et on donnera les expressions de a_{p+1} et b_{p+1} en fonction de a_p et b_p, pour tout $p \in \mathbf{N}$.

   (b) Démontrer que, pour tout $p \in \mathbf{N}$,

$$a_p - b_p = (-1)^p + 6 \sum_{k=0}^{p-1} (-1)^{p-k} b_k \cdot$$

   (c) En déduire que l'assertion « $b_p = 0$ et a_p est multiple de 3 » est fausse, pour tout $p \in \mathbf{N}$.

2. On note θ l'unique nombre réel de l'intervalle $[0, \pi]$ tel que $\cos\theta = \dfrac{1}{3}$.
   L'objectif de cette question est de démontrer que θ et π sont *incommensurables*, c'est-à-dire que le nombre $\dfrac{\theta}{\pi}$ est irrationnel.
   Pour cela, on entame un raisonnement par l'absurde en supposant que $\dfrac{\theta}{\pi}$ est un nombre rationnel. On peut alors l'écrire :

$$\exists\, m \in \mathbf{N}\,,\, n \in \mathbf{N}^* \,/\, \frac{\theta}{\pi} = \frac{m}{n} \cdot$$

   (a) Justifier l'existence et l'unicité de θ.

   (b) Justifier que $e^{i\,2n\theta} = 1$.

   (c) Démontrer que $\sin\theta = \dfrac{2\sqrt{2}}{3}$ et en déduire la valeur de $e^{i\theta}$.

   (d) En déduire que $(1 + i\,2\sqrt{2})^{2n} = 3^{2n}$.

   (e) En déduire qu'il existe $(a_{2n}, b_{2n}) \in \mathbf{Z}^2$ tel que $a_{2n} = 3^{2n}$ et $b_{2n} = 0$.

   (f) Aboutir à une absurdité et conclure.