

# VARIABLES ALÉATOIRES

## Exercice 1

On s'intéresse dans cet exercice à l'étude de trois jeux présents dans une fête foraine.

### 1) Premier jeu

Pour ce premier jeu de hasard, l'observation montre qu'une partie est gagnée avec la probabilité  $\frac{1}{10}$ , perdue avec la probabilité  $\frac{9}{10}$ .

Le joueur réalise  $N$  parties indépendantes ( $N \geq 2$ ), et la mise pour chaque partie est de 1 euro. Toute partie gagnée rapporte 3 euros.

On note  $X_N$  la variable aléatoire représentant le nombre de parties gagnées, et  $Y_N$  la variable aléatoire représentant le gain algébrique du joueur.

- (a) Donner la loi de  $X_N$  ainsi que la valeur de l'espérance et de la variance de cette variable.
- (b) Exprimer  $Y_N$  en fonction de  $X_N$ . En déduire la valeur de l'espérance et de la variance de  $Y_N$ .

### 2) Deuxième jeu

Pour ce deuxième jeu, le participant lance trois fléchettes dans une cible circulaire de centre  $O$  et de rayon 1. Pour  $1 \leq i \leq 3$ , on note  $F_i$  l'événement selon lequel la fléchette  $i$  arrive à une distance inférieure à  $\frac{1}{5}$  du centre. Les trois événements  $F_1, F_2$  et  $F_3$  sont supposés indépendants.

Le joueur gagne si, au moins une des trois fléchettes est à une distance inférieure à  $\frac{1}{5}$  du centre.

On note  $M$  la variable aléatoire de Bernoulli qui vaut 1 si le joueur gagne une partie et 0 sinon.

- (a) On admet que la probabilité de toucher une partie  $A$  de la cible avec une fléchette donnée, est égale au rapport :

$$\frac{\text{Aire de la partie } A}{\text{Aire de la cible}}.$$

Montrer que pour  $i \in \{1, 3\}$ ,  $\mathbf{P}(F_i) = \frac{1}{25}$ .

- (b) Exprimer l'événement  $[M = 0]$  à l'aide des événements  $F_1, F_2$  et  $F_3$ .
- (c) Déterminer la loi de  $M$ .
- (d) Si on note  $X_N$  le nombre de parties gagnées au cours de  $N$  parties indépendantes, quelle est la loi de  $X_N$  ?

### 3) Troisième jeu

Pour ce dernier jeu, le participant lance successivement  $n$  boules au hasard dans  $N$  cases numérotées de 1 à  $N$  avec  $N \geq 2$ . On suppose que les différents lancers de boules sont indépendants et que la probabilité pour qu'une boule quelconque tombe dans une case donnée est  $\frac{1}{N}$ . Une case peut contenir plusieurs boules.

Le gain étant fonction du nombre de cases atteintes, on étudie la variable aléatoire  $T_n$  égale au nombre de cases non vides à l'issue des  $n$  lancers.

- (a) Déterminer en fonction de  $n$  et de  $N$  les valeurs prises par  $T_n$ , pour  $n \geq 1$ .
- (b) Donner les lois de  $T_1$  et  $T_2$ .
- (c) Déterminer, lorsque  $n \geq 2$ , la probabilité des événements  $[T_n = 1], [T_n = 2], [T_n = n]$ .  
*Indication* : pour la dernière probabilité on distinguera deux cas  $n > N$  et  $n \leq N$ .
- (d) À l'aide de la formule des probabilités totales, justifier l'égalité (I) suivante, pour tout entier  $k$  tel que  $1 \leq k \leq n$ ,

$$(I) \quad \mathbf{P}([T_{n+1} = k]) = \frac{k}{N} \mathbf{P}([T_n = k]) + \frac{N - k + 1}{N} \mathbf{P}([T_n = k - 1]).$$

- (e) Afin de calculer l'espérance  $\mathbf{E}(T_n)$  de la variable  $T_n$ , on considère la fonction polynomiale  $G_n$  définie par :

$$\forall x \in \mathbf{R}, \quad G_n(x) = \sum_{k=1}^n \mathbf{P}([T_n = k]) x^k.$$

- i. Quelle est la valeur de  $G_n(1)$  ?
- ii. Exprimer  $\mathbf{E}(T_n)$  en fonction de  $G'_n(1)$ .
- iii. En utilisant la relation (I), montrer que :

$$\forall x \in \mathbf{R}, \quad G_{n+1}(x) = \frac{1}{N} (x - x^2) G'_n(x) + x G_n(x).$$

iv. En dérivant l'expression précédente, en déduire que:

$$\mathbf{E}(T_{n+1}) = \left(1 - \frac{1}{N}\right) \mathbf{E}(T_n) + 1.$$

v. Prouver enfin que l'espérance de la variable  $T_n$  est donnée par:

$$\mathbf{E}(T_n) = N \left[1 - \left(1 - \frac{1}{N}\right)^n\right].$$