Applications linéaires et systèmes linéaires - TD

Présentation des exercices : ordre au choix.

- Exercice 1 : géométrie et systèmes linéaires à paramètres, assez simple.
- Exercice 2 : système à n équations, lien avec la géométrie du plan.
- Exercice 3 : Espaces vectoriels et applications linéaires. Issu d'un problème de concours BL.

Exercice 1
Soient $(a,b) \in \mathbf{R}^2$, deux réels fixés. On définit le système linéaire (E) d'inconnues $(x,y,z) \in \mathbf{R}^3$ par

$$(E) \qquad \begin{cases} ax+y+z &= -1 \\ x+ay+z &= -a \\ x+y+az &= b \end{cases}$$

1. À l'aide de la méthode du pivot de Gauss, donner la nature géométrique des solutions en fonction des valeurs de a et b (ensemble vide, point, droite...). *On ne demande pas l'expression des solutions.*
2. Dans l'espace de dimension 3, on considère les trois plans d'équations

$$\mathcal{P}_1 \,:\, -2x+y+z+1=0, \qquad \mathcal{P}_2 \,:\, x-2y+z-2=0, \qquad \mathcal{P}_3 \,:\, x+y-2z+1=0$$

   Montrer que ces trois plans s'intersectent en une droite dont on donnera un point et un vecteur directeur.

Exercice 2
$A_1, A_2, \cdots A_n$ désignent des points du plan complexes d'affixes $a_1, a_2, \cdots, a_n$.
On cherche une condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe un polygone de sommets $M_1, M_2, \cdots, M_n$ dont les milieux sont les points A_i. On note z_i l'affixe de M_i. On pose A_i milieu de $[M_i, M_{i+1}]$ avec la convention $M_{n+1} = M_1$.

1. Écrire la condition d'existence sous la forme d'un système à coefficients entiers.
2. Montrer que si n impair, alors il existe une unique solution.
3. Montrer que si n est pair, il y a soit une infinité, soit 0 solutions. Donner la condition d'existence.
4. *Géométrie* : placer 3 points A_1, A_2 et A_3 quelconques dans le plan puis construire le polygone M_1, M_2, M_3.

Exercice 3
La mise en page et la formulation se veulent les plus proches possibles du sujet initial.

On note $\mathcal{E}$ l'ensemble des fonctions $f : [0,1] \to \mathbf{R}$ deux fois dérivables vérifiant l'équation $f'' + \lambda f = 0$ sur l'intervalle $[0,1]$ ($\lambda \in \mathbf{R}$ est donné), et θ l'application $\mathcal{E} \to \mathbf{R} : f \mapsto (f(0), f'(0))$.

1. Montrer que $\mathcal{E}$ est un espace vectoriel sur $\mathbf{R}$, et θ une application linéaire.
2. Étudier les variations des fonctions ch et sh définies sur $\mathbf{R}$ à partir de la fonction exponentielle par

$$\forall x \in \mathbf{R}, \quad \mathrm{ch}\,(x) = \frac{\exp(x)+\exp(-x)}{2} \quad , \quad \mathrm{sh}\,(x) = \frac{\exp(x)-\exp(-x)}{2}.$$

   On exprimera la dérivée, et on dressera un tableau pour chacune de ces fonctions.
3. (a) Pour $\lambda \neq 0$, on note f_λ, g_λ les fonctions définies sur $[0,1]$ par

$$f_\lambda(x) = \mathrm{ch}\left(x\sqrt{-\lambda}\right) \quad ; \quad g_\lambda(x) = \mathrm{sh}\left(x\sqrt{-\lambda}\right) \quad \text{si } \lambda < 0,$$
$$f_\lambda(x) = \cos\left(x\sqrt{\lambda}\right) \quad ; \quad g_\lambda(x) = \sin\left(x\sqrt{\lambda}\right) \quad \text{si } \lambda > 0.$$

   Montrer que la famille (f_λ, g_λ) est une famille libre de $\mathcal{E}$.

   (b) L'hypothèse est, ici, $\lambda < 0$. Soit $f \in \mathcal{E}$. Montrer que la fonction $f\,f_\lambda' - f'\,f_\lambda$ est constante. En déduire l'injectivité de l'application θ (on pourra étudier, après avoir remarqué que f_λ ne s'annule pas, la fonction $\frac{f}{f_\lambda}$ pour $f \in \mathrm{Ker}\,\theta$).

   (c) On se place dans le cas $\lambda > 0$. Pour $f \in \mathcal{E}$, étudier la fonction $f'^2 + \lambda f^2$. En déduire l'injectivité de l'application θ.
4. Déterminer $\mathcal{E}$ lorsque $\lambda = 0$. Donner une base de cet ensemble.