# TD DE SOUTIEN SUR LES ESPACES VECTORIELS

## 1 Espaces vectoriels

**Exercice 1**
Démontrer si les ensembles suivants sont (ou non) des espaces vectoriels.

1. $E_1 = \left\{(x, y) \in \mathbf{R}^2,\ x = y + 1\right\}$.
2. $E_2 = \left\{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3,\ x = y - z\right\}$.
3. $E_3 = \left\{(x, 2x - y, y),\ (x, y) \in \mathbf{R}^2\right\}$.
4. $E_4$ l'ensemble des suites qui tendent vers $+\infty$.
5. $E_5$ l'ensemble des fonctions paires.
6. $E_6$ l'ensemble des fonctions $\pi$-périodiques.
7. $E_7$ l'ensemble des fonctions positives.

**Exercice 2**
Les familles de vecteurs suivantes sont-elles libres ?

1. $(1, 1, 0),\ (1, 0, -1),\ (1, 2, 1)$ dans $\mathbf{R}^3$.
2. $(1, 1, 0, 0),\ (1, 0, -1, 1),\ (1, 2, 1, 0)$ dans $\mathbf{R}^4$.
3. $x \mapsto x^2,\ x \mapsto x^3,\ x \mapsto x^4$ dans $\mathbf{R}^{\mathbf{R}}$.

**Exercice 3**
Soit $E = \left\{(x, y, z, t) \in \mathbf{R}^4,\ x = 2y - t,\ y = z\right\}$.

1. Montrer que $E$ est un espace vectoriel.
2. Trouver une base de $E$ (et le démontrer).

**Exercice 4**
Soit $E = \left\{(x, 2x, y + z - x, z + x),\ (x, y, z) \in \mathbf{R}^3\right\}$.

1. Montrer que $E$ est un espace vectoriel.
2. Trouver une base de $E$ (et le démontrer).

*Exercices de difficulté croissante*

**Exercice 5**
Soient dans $\mathbf{R}^3$ les vecteurs

$$v_1 = (1, 1, 0), \quad v_2 = (4, 1, 4) \quad \text{et} \quad v_3 = (2, -1, 4)$$

1. Montrer que $v_1$ et $v_2$ forment une famille libre. Faire de même avec $v_1$ et $v_3$, puis avec $v_2$ et $v_3$.
2. La famille $(v_1, v_2, v_3)$ est-elle libre ?

**Exercice 6**
Soit $(e_1, e_2, \cdots, e_p)$ une famille libre de $E$.
Montrer que
$a \notin \text{Vect}\,(e_1, e_2, \cdots, e_p)$
$\Rightarrow (e_1 + a, e_2 + a, \cdots, e_p + a)$ est libre.

**Exercice 7**
Soit $E = \left\{(x_i)_{i \in [\![1,n]\!]} \in \mathbf{R}^n,\ \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i = 0\right\}$.

- Montrer que c'est un espace vectoriel.
- Donner une base de $E$.

**Exercice 8**
Soit $E$ l'ensemble des fonctions continues sur $[-1, 1]$ qui sont affines sur $[-1, 0]$ et sur $[0, 1]$.

1. Donner un exemple d'une telle fonction qui n'est pas affine sur $[-1, 1]$.
2. Démontrer que $E$ est un espace vectoriel et en donner une base.