TD 1 - SUITES

Exercice 1 (Développement dyadique)
On fixe un réel $\alpha \in [0,1]$. On définit alors deux suites réelles (u_n) et (v_n) par :

$$\forall n \in \mathbf{N}, \qquad u_n = \frac{\lfloor 2^n \alpha \rfloor}{2^n} \quad \text{et} \quad v_n = u_n + \frac{1}{2^n}$$

où pour tout $x \in \mathbf{R}$, $\lfloor x \rfloor$ désigne la partie entière de x.

1) **(a)** Montrer que : $\forall n \in \mathbf{N}, u_n \leqslant \alpha < v_n$.

(b) En déduire que : $\forall n \in \mathbf{N}, |u_n - \alpha| \leqslant v_n - u_n \quad \text{et} \quad |v_n - \alpha| \leqslant v_n - u_n$.

(c) La suite de terme général $(v_n - u_n)$ est-elle convergente ? Conclure en ce qui concerne la convergence éventuelle de (u_n) et (v_n).

2) **(a)** Soit $n \in \mathbf{N}$. Justifier que : $2\lfloor 2^n \alpha \rfloor \leqslant 2^{n+1}\alpha < 2\lfloor 2^n \alpha \rfloor + 2$.

(b) En déduire que si $n \in \mathbf{N}$:

- soit $u_{n+1} = u_n$ et $v_{n+1} = v_n - \frac{1}{2^{n+1}}$,
- soit $u_{n+1} = u_n + \frac{1}{2^{n+1}}$ et $v_{n+1} = v_n$.

(c) On définit alors pour chaque $n \in \mathbf{N}$: $a_{n+1} = 2^{n+1}(u_{n+1} - u_n)$.
Justifier que cette suite est à valeurs dans $\{0,1\}$ et que si on pose $a_0 = u_0$:

$$\forall n \in \mathbf{N}, \quad u_n = a_0 + \frac{a_1}{2} + \cdots + \frac{a_n}{2^n}.$$

La suite $(a_n)_{n \in \mathbf{N}}$ s'appelle le développement dyadique de α.

3) Dire si les suites (a_n) suivantes sont les développements dyadiques d'un $\alpha \in [0,1]$, et si oui dire à quoi est égal α.

(a) On suppose que tous les termes de (a_n) sont nuls sauf : $a_1 = a_3 = a_4 = 1$.

(b) $a_0 = 0$ et tous les autres termes de la suite sont égaux à 1.