TD 1 - Applications

Exercice 1
On considère l'application

$$f : x \mapsto \frac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x - x}$$

1) Étudier les variations de $h\ : x \mapsto \mathrm{e}^x - x$ sur $\mathbf{R}$ et en déduire le domaine de définition $\mathcal{D}_f$ de f.

2) Donner le domaine de continuité et de dérivabilité de f.

3) Étudier les variations de f sur $\mathcal{D}_f$.

4) Étudier les limites de f au bord de son domaine de définition. En déduire les éventuelles asymptotes.

5) **(a)** f admet-elle un minimum sur $\mathcal{D}_f$? si oui, lequel ?

(b) f admet-elle un maximum sur $\mathcal{D}_f$? si oui, lequel ?

6) Tracer l'allure de la courbe représentative de f avec ses éléments remarquables.

Exercice 2
On considère l'application

$$g : x \mapsto \frac{x-1}{\ln x}$$

1) Donner le domaine de définition $\mathcal{D}_g$ de g.

2) Donner le domaine de continuité et de dérivabilité de g.

3) Déterminer les variations de g sur son domaine de dérivabilité.

Indication : on pourra étudier la fonction $x \mapsto x(\ln x - 1) + 1$.

4) Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x)$.

5) Calculer $\lim\limits_{x \to 0} g(x)$.

6) **(a)** Calculer $\lim\limits_{x \to 1} \frac{\ln x}{x-1} = \lim\limits_{x \to 1} \frac{\ln x - \ln 1}{x-1}$.

(b) En déduire $\lim\limits_{x \to 1} g(x)$.

7) Pour a et b deux réels, on définit l'application

$$\widetilde{g} : \begin{cases} x \mapsto g(x) & \text{si } x \in \mathcal{D}_g \\ x \mapsto a & \text{si } x = 0 \\ x \mapsto b & \text{si } x = 1 \end{cases}$$

Montrer qu'il existe des valeurs de a et b (que l'on précisera) pour lesquelles $\widetilde{g}$ est continue sur son domaine de définition.

Dans la suite, on travaillera avec $\widetilde{g}$ définie à partir de ces valeurs.

8) $\widetilde{g}$ est-elle dérivable en 0 ? si oui, calculer sa dérivée.

$\widetilde{g}$ admet-elle une tangente en 0 ? si oui, préciser laquelle.

9) Tracer la courbe représentative de $\widetilde{g}$.

On admet que

- $\widetilde{g}$ est dérivable en 1 et de dérivée égale à $\frac{1}{2}$.
- la courbe de $\widetilde{g}$ a une forme qui ressemble à celle du logarithme au voisinage de $+\infty$.