TD 1 - Probabilités sur un univers fini

Exercice 1 (Probabilités)
Un joueur décide de jouer aux machines à sous (c'est pas bien !).
Il va jouer sur deux machines $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ qui sont réglées de la façon suivante :

- la probabilité de gagner sur la machine $\mathcal{A}$ est de $\dfrac{1}{5}$,
- la probabilité de gagner sur la machine $\mathcal{B}$ est de $\dfrac{1}{10}$.

Le joueur sait que les deux machines ont des réglages différents, mais ne sait pas laquelle est la plus favorable.
Son objectif est de maximiser ses gains sur l'ensemble de ses parties. Le but de cet exercice est de comparer deux stratégies différentes.
On définit pour tout $k \geqslant 1$, les événements suivants :

- $G_k =$ « le joueur gagne la k-ième partie »,
- $A_k =$ « la k-ième partie se déroule sur la machine $\mathcal{A}$ ».

Et pour $n \geqslant 1$, on pose : $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \mathbf{P}(G_k)$.

Partie 1 : Stratégie naïve
On suppose que le joueur adopte la stratégie suivante :
À chaque partie, il choisit de façon équiprobable l'une des deux machines. Ainsi, à la k-ième partie il choisit la machine $\mathcal{A}$ avec la probabilité $\frac{1}{2}$ (et donc la machine $\mathcal{B}$ avec la probabilité $\frac{1}{2}$).

1) Pour $k \geqslant 1$, donner $\mathbf{P}(G_k)$.
Indication : on pourra utiliser une famille complète d'événements.

2) En déduire, pour $n \geqslant 1$, la valeur de S_n. Que peut-on dire de la suite $\left(\dfrac{S_n}{n}\right)_{n \geqslant 1}$?

Partie 2 : Stratégie avec apprentissage
On suppose désormais que le joueur adopte une **autre stratégie** :

- il commence par choisir une machine au hasard,
- après chaque partie, il change de machine s'il vient de perdre; il rejoue sur la même machine s'il vient de gagner.

3) Déterminer la probabilité de gagner la première partie.

4) Déterminer la probabilité de gagner la deuxième partie.

5) Sachant que la deuxième partie a été gagnée, quelle est la probabilité que la première partie ait eu lieu sur la machine $\mathcal{A}$?

6) Soit $k \geqslant 1$.

(a) Exprimer $\mathbf{P}(G_k)$ en fonction de $\mathbf{P}(A_k)$.

(b) Montrer que $\mathbf{P}(A_{k+1}) = -\dfrac{7}{10}\mathbf{P}(A_k) + \dfrac{9}{10}$.

(c) En déduire $\mathbf{P}(A_k)$ puis $\mathbf{P}(G_k)$ en fonction de k.
Indication : On pourra commencer par exprimer $\mathbf{P}(A_{k+1}) - \frac{9}{17}$ en fonction de $\mathbf{P}(A_k) - \frac{9}{17}$.

(d) Calculer S_n.

(e) Montrer que $\left(\dfrac{S_n}{n}\right)$ admet une limite en $+\infty$ et la déterminer.

7) Peut-on dire que la deuxième stratégie est meilleure que la première ?