TD 2 - Applications

Exercice 1

☝ pour les graphes, penser à bien indiquer les tangentes horizontales, verticales, les asymptotes, croisements des axes, branches infinies... lorsque c'est pertinent.

Soit $p, q \in]0,1[$ et soit $h : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ la fonction définie pour $t \in \mathbf{R}$ par

$$h(t) = tp - \ln\Big[(1-q) + q\exp(t)\Big] .$$

Soit en outre $d =]0,1[\times]0,1[\to \mathbf{R}$ la fonction définie par

$$d(x,y) = x\ln\left(\frac{x}{y}\right) + (1-x)\ln\left(\frac{1-x}{1-y}\right) .$$

1) Montrer que $\frac{\ln(1+x)}{x}$ admet une limite quand x tend vers 0^+ et déterminer cette limite.
Indication : On pourra interpréter l'expression comme un taux d'accroissement $\frac{\ln(1+x)-\ln 1}{x}$.

2) Calculer $h'(t)$ puis $h''(t)$.

3) Montrer que h admet un unique maximum sur $\mathbf{R}$, et déterminer en fonction de p et de q la valeur t^* où ce maximum est atteint.

☝ On pourra montrer que h' s'annule en un unique point, et conclure d'après ses variations.

4) Montrer que $h(t^*) = d(p,q)$.

5) Pour $x \in]0,1[$ fixé, tracer l'allure du graphe de la fonction $f : y \mapsto d(x,y)$, en précisant les éventuelles tangentes et asymptotes remarquables.

☝ Dans cette question on dérive par rapport à la variable y. x est considéré comme une constante.

6) Pour $y \in]0,1[$ fixé, tracer l'allure du graphe de la fonction $g : x \mapsto d(x,y)$, en précisant les éventuelles tangentes et asymptotes remarquables.

7) Montrer que $d(p,q) \geqslant 0$ pour toutes les valeurs de $(p,q) \in]0,1[^2$.

8) Pour quelles valeurs de $(p,q) \in]0,1[^2$ a-t-on $d(p,q) = 0$?

9) Montrer : $\forall (p,q) \in]0,1[^2$, $d(p,q) \geqslant 2(p-q)^2$.