TD - Probabilités sur un univers fini

Cours sur les suites arithmético-géométriques : Soit $(a, b) \in \mathbf{R}^* \times \mathbf{R}$. Si $u_0 \in \mathbf{R}$, et $\forall n \in \mathbf{N}$, $u_{n+1} = au_n + b$, alors on peut trouver l'expression de u_n en fonction de n en procédant de la manière suivante :

- on trouve une suite v constante, solution de la relation de récurrence (sans s'occuper de la condition initiale u_0),
- on montre que la suite $u - v$ est géométrique de raison a, et on en déduit u_n en fonction de n.

Exercice 1 (*)
Des études scientifiques complètement bidons, mais extrêmement poussées ont montré qu'un étudiant de la classe avait 40% de chances d'avoir la moyenne à son devoir surveillé.
Aucun élève n'est à l'abri d'un échec et même les 10 meilleurs étudiants ont chacun 3% de chances d'avoir en dessous de la moyenne.
Sachant qu'un étudiant a au dessus de la moyenne, quelle est la probabilité qu'il fasse partie des 10 meilleurs ?
(on considère qu'il y a 40 personnes dans la classe).

L'exercice suivant est sous deux versions différentes. Un version abstraite avec une formulation paramétrique générale, et une version guidée avec des valeurs numériques pour ceux qui ont plus de difficultés.

Exercice 2 (version asbstraite)
On parle d'un pays où tous les habitants mentent avec une probabilité p.
Une information y est transmise par la méthode du « téléphone arabe » : une chaîne de n personnes se transmettent l'information successivement l'une à l'autre.
Si la personne est honnête, alors l'information est transmise exactement, mais si la personne ment, alors l'information est transformée en son contraire.
On remarque en particulier qu'après un nombre pair de menteurs, on retrouve l'information initiale.

1) Quelle est la probabilité que la personne numéro n ait la bonne information ?
2) Étudier cette probabilité quand $n \to +\infty$, interpréter.

[version guidée] On parle d'un pays où tous les habitants mentent avec une probabilité $\frac{3}{10}$.
Une information y est transmise par la méthode du « téléphone arabe » : une chaîne de n personnes se transmettent l'information successivement l'une à l'autre.
Si la personne est honnête, alors l'information est transmise exactement, mais si la personne ment, alors l'information est transformée en son contraire.
On remarque en particulier qu'après un nombre pair de menteurs, on retrouve l'information initiale.
On note l'événement E_k : « L'information transmise par la personne k est vraie. »

1) Justifier que $p_1 = \frac{7}{10}$ et montrer que $\qquad \forall k \in \mathbf{N}^*,\ p_{k+1} = \dfrac{2}{5}p_k + \dfrac{3}{10}$.
2) Déterminer p_n en fonction de n.
3) Étudier $\lim\limits_{n\to+\infty} p_n$ et interpréter.

Exercice 2 (Déceler une pièce truquée)
Pour les applications numériques faites à la calculatrice, les résultats seront exprimés en % arrondis au % près.

Un joueur possède n pièces dans la poche. Parmi celles-ci, un nombre p ont deux faces « pile », les autres sont normales.

1) Il en prend une pièce au hasard dans sa poche et la lance.
On note T l'événement : « la pièce est truquée ».
On note P l'événement : « la pièce donne pile ».

2) Sachant que la pièce a donné « pile », quelle est la probabilité que la pièce soit truquée ?
Indication : pour $n = 10$ et $p = 3$ on doit trouver environ 46%.

3) La même pièce est lancée à nouveau et donne encore « pile ». Quelle est la probabilité qu'elle soit truquée ?
Indication : pour $n = 10$ et $p = 3$ on doit trouver environ 63%.

4) La même pièce est lancée k fois de suite au total et donne « pile » à chaque lancer. Quelle est la probabilité qu'elle soit truquée ?

5) À partir de combien de lancers est-on sûr à 95% qu'elle est truquée ?
Indication : pour $n = 10$ et $p = 3$ on doit trouver 6 lancers.

Exercice 3 (***)
Une urne contient p boules blanches et q boules noires.

1) Quelle est la probabilité que la première boule blanche tirée apparaisse lors du n-ième tirage?

2) Quelle est la probabilité que la k-ième boule blanche tirée apparaisse lors du n-ième tirage?