TD 2 - Révisions

Exercice 1 (Résolution d'une équation fonctionnelle)
On cherche l'ensemble des fonctions $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, continues, qui vérifient l'équation fonctionnelle :

$$(E) : \qquad \forall x \in \mathbf{R}, \quad f(2x+1) = \frac{f(x)+5x}{3}.$$

(**Recherche d'une solution particulière**)

1) Chercher $(a,b) \in \mathbf{R}^2$, tel que l'application $f_0 : x \mapsto ax+b$ soit solution de (E).

(**Cas général**)

On suppose que f est une solution quelconque de (E), et pour tout $x \in \mathbf{R}$, on pose $g(x) = f(x) - f_0(x)$.

2) **(a)** Vérifier que

$$\forall x \in \mathbf{R},\ g\left(2x+1\right) = \frac{g(x)}{3}.$$

(b) En déduire que

$$\forall x \in \mathbf{R},\ g\left(x\right) = \frac{1}{3}\, g\left(\frac{x-1}{2}\right).$$

3) Soit $x \in \mathbf{R}$, on définit (u_n) par

$$u_0 = x \qquad \text{et} \qquad \forall n \in \mathbf{N}, \quad u_{n+1} = \frac{u_n - 1}{2}.$$

(a) Montrer que la suite (u_n+1) est une suite géométrique et déterminer sa raison.

(b) Pour tout $n \in \mathbf{N}$, donner l'expression de u_n en fonction de n et de x.

(c) Montrer que la suite converge vers une limite ℓ que l'on déterminera.

4) Montrer que

$$\forall n \in \mathbf{N}, \quad g(u_0) = \frac{1}{3^n} g(u_n).$$

5) On rappelle que si une fonction g est continue sur $\mathbf{R}$, alors pour toute suite (u_n) qui converge vers ℓ, $g\left(u_n\right)$ tend vers $g(\ell)$.

Calculer $g(u_0)$, et en déduire l'expression de g sur $\mathbf{R}$.

Conclure.