TD 2 - SUITES

Exercice 1
On définit la suite u par

$$u_0 = 1 \qquad \text{et} \qquad \forall n \in \mathbf{N}, \quad u_{n+1} = u_n^2 + u_n.$$

1) **(a)** Montrer que $\forall n \in \mathbf{N}$, $u_n \geqslant n$.

(b) En déduire la limite $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

Le but de la suite de l'exercice est d'évaluer plus précisément le comportement de la suite quand $n \to +\infty$.

2) Pour tout $n \in \mathbf{N}$, on pose $v_n = \dfrac{1}{2^n} \ln u_n$.

(a) Justifier que la suite v est bien définie.

(b) Montrer que

$$\forall k \in \mathbf{N}, \qquad v_{k+1} - v_k = \frac{1}{2^{k+1}} \ln\left(1 + \frac{1}{u_k}\right). \tag{1}$$

(c) En déduire que la suite (v_n) est croissante et que

$$\forall k \in \mathbf{N}, \qquad 0 \leqslant v_{k+1} - v_k \leqslant \frac{1}{2^{k+1}} \ln(2). \tag{2}$$

(d) Montrer que

$$\forall n \in \mathbf{N}, \qquad 0 \leqslant v_{n+1} - v_0 \leqslant \ln(2).$$

(e) En déduire que la suite v converge.
Dans la suite de l'exercice, on notera sa limite sous la forme $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \ln\alpha$ avec $\alpha \in \mathbf{R}_+^*$.

3) **(a)** Montrer que la suite u est croissante.

(b) En s'inspirant de la méthode de la question **2)** , montrer que

$$\forall (n,p) \in \mathbf{N}^2, \qquad 0 \leqslant v_{p+n+1} - v_n \leqslant \frac{1}{2^n} \ln\left(1 + \frac{1}{u_n}\right). \tag{3}$$

(c) En déduire que : $\quad \forall n \in \mathbf{N},\ u_n \leqslant \alpha^{2^n} \leqslant u_n + 1.$

(d) Calculer $\quad \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\alpha^{2^n}}{u_n}.$
Que peut-on en déduire sur la position de α par rapport à 1 ?

4) Pour tout $n \in \mathbf{N}$, on pose $\delta_n = \alpha^{2^n} - u_n$. La suite $(\delta_n)_{n\in\mathbf{N}}$ mesure l'écart entre α^{2^n} et u_n.

(a) Montrer que $\forall n \in \mathbf{N},\ 0 \leqslant \delta_n \leqslant 1$.

(b) Montrer que

$$\forall n \in \mathbf{N},\ \delta_n = \frac{1}{2} + \frac{\delta_{n+1} + \delta_n^2 - \delta_n}{2} \alpha^{-2^n}.$$

(c) En déduire que la suite $(\delta_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est convergente et calculer sa limite.