# ESPACES VECTORIELS EN DIMENSION FINIE

**Exercice 1**
Dans tout ce problème, $a$ désigne un réel.
On se propose d'étudier les suites réelles $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ vérifiant une relation de récurrence du type :

$$\text{Pour tout } n \text{ de } \mathbf{N}, \quad u_{n+1} = au_n + P(n)$$

où $P$ est un polynôme.
Le $\mathbf{R}-$espace vectoriel des suites réelles est noté $\mathbf{R}^{\mathbf{N}}$. Un élément de $\mathbf{R}^{\mathbf{N}}$ est noté indifféremment $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ ou $u$.

La partie 1 étudie le cas où $P$ est constant.
La partie 2 étudie le cas où $a \neq 1$.
La partie 3 étudie le cas où $a = 1$.

**Partie 1**
Dans cette partie, on pose $E_a^{(0)} = \left\{u \in \mathbf{R}^{\mathbf{N}};\ \exists b \in \mathbf{R};\ \forall n \in \mathbf{N};\ u_{n+1} = au_n + b\right\}$.

**1)** Soit $u \in E_a^{(0)}$. Il existe donc $b$ réel tel que pour tout $n \in \mathbf{N}$ : $u_{n+1} = au_n + b$. Montrer l'unicité de $b$.
On notera $b = b_u$ pour $u \in E_a^{(0)}$.

**2)** **(a)** Déterminer $E_1^{(0)}$.

**(b)** Déterminer $E_0^{(0)}$.

*Dans le reste de cette partie, $a$ est supposé différent de* 1.

**3)** Montrer que $E_a^{(0)}$ est un $\mathbf{R}$-espace vectoriel.

**4)** Soit $x$ la suite constante égale à 1 (pour tout $n$ de $\mathbf{N}$, $x_n = 1$) et soit $y$ la suite définie, pour tout $n$ de $\mathbf{N}$ par : $y_n = a^n$.
Montrer que $(x, y)$ est une famille libre de $E_a^{(0)}$. On précisera les valeurs de $b_x$ et $b_y$.

**5)** Soit $u \in E_a^{(0)}$.

**(a)** Montrer qu'il existe $(\lambda, \mu) \in \mathbf{R}^2$ unique tel que $\begin{cases} \lambda x_0 + \mu y_0 = u_0 \\ \lambda x_1 + \mu y_1 = u_1 \end{cases}$.

**(b)** Montrer que, pour $\lambda$ et $\mu$ définis à la question précédente, pour tout $n$ de $\mathbf{N}$,

$$u_n = \lambda x_n + \mu y_n.$$

**(c)** Que peut-on en conclure ?

**6)** Déterminer $E_a^{(0)}$. On donnera en particulier la dimension de $E_a^{(0)}$.

**Partie 2**
Dans cette partie, on suppose $a \neq 1$.
On fixe un entier naturel $p$. On note $\mathbf{R}_p[X]$ le $\mathbf{R}-$espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à $p$.
On pourra confondre polynôme et fonction polynomiale.
On pose $E_a^{(p)} = \left\{u \in \mathbf{R}^{\mathbf{N}};\ \exists P \in \mathbf{R}_p[X];\ \forall n \in \mathbf{N};\ u_{n+1} = au_n + P(n)\right\}$.

**7)** Soit $u \in E_a^{(p)}$. Il existe donc $P \in \mathbf{R}_p[X]$ tel que :

$$\forall n \in \mathbf{N},\ u_{n+1} = au_n + P(n).$$

Montrer l'unicité de $P$.
*On pourra utiliser l'application $\varphi$ de $\mathbf{R}_p[X]$ dans $\mathbf{R}^{p+1}$ définie par $\varphi(P) = (P(0), P(1), \cdots, P(n))$.*

On notera $P = P_u$ pour $u \in E_a^{(p)}$.

**8)** Montrer que $E_a^{(p)}$ est un $\mathbf{R}-$espace vectoriel.

**9)** Montrer que l'application $\theta$ définie sur $E_a^{(p)}$ par $\theta(u) = P_u$ est une application linéaire de $E_a^{(p)}$ dans $\mathbf{R}_p[X]$.

**10)** Déterminer $\ker(\theta)$, le noyau de $\theta$.

**11)** Pour $k \in \mathbf{N}$, on pose $Q_k = (X+1)^k - aX^k$.

**(a)** Quel est le degré de $Q_k$ ?

**(b)** Montrer que la famille $(Q_0, Q_1, \cdots, Q_p)$ est une base de $\mathbf{R}_p[X]$.

**(c)** Montrer que pour tout $k \in \{0, 1, \cdots, p\}$, $Q_k$ est dans l'image de $\theta$, notée $\operatorname{Im}(\theta)$.

**(d)** Que peut-on en conclure ?

**12)** Déduire des questions précédentes la dimension de $E_a^p$.

**13)** Pour $k \in \{0, 1, \cdots, p\}$, on pose $x^{(k)}$ la suite définie, pour tout $n$ de $\mathbf{N}$, par $x_n^{(k)} = n^k$.
On rappelle que $y$ est la suite définie pour tout $n$ de $\mathbf{N}$ par : $y_n = a^n$.
Montrer que $\left(x^{(0)}, \cdots, x^{(p)}, y\right)$ est une base de $E_a^{(p)}$.

**14)** *Application :* déterminer la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ vérifiant :

$$\begin{cases} \forall n \in \mathbf{N}, & u_{n+1} = 2u_n - 2n + 7, \\ & u_0 = -2. \end{cases}$$

**Partie 3**
Dans cette partie, on suppose que $a = 1$.

**15)** En adaptant les résultats obtenus à la partie précédente, déterminer

$$E_a^{(p)} = \left\{u \in \mathbf{R}^{\mathbf{N}};\ \exists P \in \mathbf{R}_p[X];\ \forall n \in \mathbf{N};\ u_{n+1} = u_n + P(n)\right\}.$$

**16)** *Application :* déterminer la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ vérifiant :

$$\begin{cases} \forall n \in \mathbf{N}, & u_{n+1} = u_n - 6n + 1, \\ & u_0 = -2. \end{cases}$$