TD - Probabilités et dénombrement

Exercice 1

On étudie dans ce problème quelques aspects élémentaires de la génétique liés aux probabilités.

Dans tout le problème, on considère une population répartie entre mâles et femelles, portant chacun des chromosomes contenant eux-mêmes des gènes. Les chromosomes, et donc les gènes, vont par paires.

On s'intéresse à une paire de gènes particuliers pouvant présenter chacun seulement deux caractères que l'on notera A et a. L'ordre n'intervenant pas, il y a donc trois paires de *génotypes* possibles, désignées par :

$$AA, \quad Aa \text{ (ou } aA), \quad aa\,.$$

On suppose les sexes mâle et femelle équirépartis dans la population et les accouplements aléatoires.

Dans la filiation, chaque enfant reçoit un gène de chaque géniteur (père et mère) avec équiprobabilité, pour constituer une paire, et les transmissions des gènes sont indépendantes.

Partie 1 : Généralités

On note u_0, $2v_0$, w_0 respectivement les proportions des génotypes AA, Aa et aa dans la population mâle initiale comme dans la population femelle initiale (et donc aussi dans la population totale initiale).

On a alors $u_0 + 2v_0 + w_0 = 1$. On pose de plus

$$p_0 = u_0 + v_0 \quad \text{et} \quad q_0 = v_0 + w_0.$$

1) Que représentent p_0 et q_0 ? Estimer la proportion de gènes de type A par rapport aux gènes de type a.

2) **(a)** Vérifier que les proportions des génotypes AA, Aa et aa à la première génération (c'est-à-dire pour la population constituée des enfants) sont respectivement :

$$u_1 = p_0^2\,, \quad 2v_1 = 2p_0q_0\,, \quad w_1 = q_0^2\,. \tag{1}$$

(b) Déterminer plus généralement les proportions u_n, v_n et w_n des génotypes AA, Aa et aa à la n-ième génération (c'est-à-dire après n filiations) et préciser la nature des suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbf{N}}$.

N.B. Ceci montre que l'on atteint approximativement la stabilité des génotypes dès la première génération quelle que soit la répartition initiale.

Partie 2 : Sélection

Dans cette partie, on fait l'hypothèse supplémentaire que les individus de type aa ne peuvent pas se reproduire ; on suppose donc un accouplement aléatoire seulement parmi les individus de type AA ou Aa.

On désigne toujours par u_0, $2v_0$, w_0 respectivement les proportions des génotypes AA, Aa et aa dans les populations mâle et femelle initiales. On suppose $w_0 \neq 1$.

3) **(a)** Quelle est la proportion de parents possibles dans la population initiale ?

(b) Déterminer en fonction de u_0 et v_0 les proportions des génotypes AA et Aa parmi les parents.

(c) On pose

$$p_0 = \frac{u_0 + v_0}{1 - w_0} \quad \text{et} \quad q_0 = \frac{v_0}{1 - w_0}.$$

Montrer qu'alors les proportions des trois génotypes dans la première génération (celle des enfants) sont encore données par les formules 1.

(d) Peut-on avoir $w_1 = 1$?

4) **(a)** On désigne toujours par u_n, $2v_n$, w_n les proportions des génotypes AA, Aa et aa respectivement à la n-ième génération et l'on pose, pour $n \in \mathbf{N}$,

$$p_n = \frac{u_n + v_n}{1 - w_n} \quad \text{et} \quad q_n = \frac{v_n}{1 - w_n}.$$

Calculer les probabilités u_{n+1}, $2v_{n+1}$, w_{n+1} pour un enfant de la $(n+1)$-ième génération d'être de génotype AA, Aa, aa respectivement.

(b) Montrer alors les relations de recurrence :

$$\forall n \in \mathbf{N}, \qquad p_{n+1} = \frac{1}{1 + q_n} \quad \text{et} \quad q_{n+1} = \frac{q_n}{1 + q_n}.$$

(c) En déduire q_n puis w_n en fonction de $n \geqslant 1$ et de q_0. (On pourra commencer par déterminer $\frac{1}{q_n}$, quand il est défini.)

Déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} w_n$. Interprétation ?