Variables aléatoires sur un univers fini - TD-3

Exercice 1
On s'intéresse dans cet exercice à l'étude de trois jeux présents dans une fête foraine.

1) Premier jeu

L'observation montre qu'une partie est gagnée avec la probabilité $\dfrac{1}{10}$, perdue avec la probabilité $\dfrac{9}{10}$.

Le joueur réalise N parties indépendantes ($N \geqslant 2$), et la mise pour chaque partie est de 1 euro.
Toute partie gagnée rapporte 3 euros.

On note X_N la variable aléatoire représentant le nombre de parties gagnées, et Y_N la variable aléatoire représentant le gain algébrique du joueur.

(a) Donner la loi de X_N ainsi que la valeur de l'espérance et de la variance de cette variable.

(b) Exprimer Y_N en fonction de X_N. En déduire la valeur de l'espérance et de la variance de Y_N.

2) Deuxième jeu

Pour ce deuxième jeu, le participant lance trois fléchettes dans une cible circulaire de centre O et de rayon 1. Pour $1 \leqslant i \leqslant 3$, on note F_i l'événement selon lequel la fléchette i arrive à une distance inférieure à $\frac{1}{5}$ du centre. Les trois événements F_1, F_2 et F_3 sont supposés indépendants.

Le joueur gagne si, au moins une des trois fléchettes est à une distance inférieure à $\frac{1}{5}$ du centre.

On note M la variable aléatoire de Bernoulli qui vaut 1 si le joueur gagne une partie et 0 sinon.

(a) On admet que la probabilité de toucher une partie A de la cible avec une fléchette donnée, est égale au rapport :

$$\frac{\text{Aire de la partie } A}{\text{Aire de la cible}}.$$

Pour $i \in \{1, 3\}$, calculer $\mathbf{P}(F_i)$.

(b) Exprimer l'événement $[M = 0]$ à l'aide des événements F_1, F_2 et F_3.

(c) Déterminer la loi de M.

(d) Si on note X_N le nombre de parties gagnées au cours de N parties indépendantes, quelle est la loi de X_N ?

3) Troisième jeu

Pour ce dernier jeu, le participant lance successivement n boules au hasard dans N cases numérotées de 1 à N avec $N \geqslant 2$. On suppose que les différents lancers de boules sont indépendants et que la probabilité pour qu'une boule quelconque tombe dans une case donnée est $\dfrac{1}{N}$. Une case peut contenir plusieurs boules.

Le gain étant fonction du nombre de cases atteintes, on étudie la variable aléatoire T_n égale au nombre de cases non vides à l'issue des n lancers.

(a) Déterminer en fonction de n et de N les valeurs prises par T_n, pour $n \geqslant 1$.

(b) Donner les lois de T_1 et T_2.

(c) Déterminer, lorsque $n \geqslant 2$, la probabilité des événements $[T_n = 1], [T_n = 2], [T_n = n]$.
Indication : pour la dernière probabilité on distinguera deux cas $n > N$ et $n \leqslant N$.

(d) À l'aide de la formule des probabilités totales, justifier l'égalité (I) suivante, pour tout entier k tel que $1 \leqslant k \leqslant n$,

$$(I) \qquad \mathbf{P}([T_{n+1} = k]) = \frac{k}{N}\mathbf{P}([T_n = k]) + \frac{N-k+1}{N}\mathbf{P}([T_n = k-1]).$$

(e) Afin de calculer l'espérance $\mathbf{E}(T_n)$ de la variable T_n, on considère la fonction polynomiale G_n définie par:

$$\forall x \in \mathbf{R}, \quad G_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \mathbf{P}([T_n = k])x^k.$$

i. Quelle est la valeur de $G_n(1)$?
ii. Exprimer $\mathbf{E}(T_n)$ en fonction de $G_n'(1)$.
iii. En utilisant la relation (I), montrer que :

$$\forall x \in \mathbf{R}, \quad G_{n+1}(x) = \frac{1}{N}(x - x^2)G_n'(x) + xG_n(x).$$

iv. En dérivant l'expression précédente, en déduire que :

$$\mathbf{E}(T_{n+1}) = \left(1 - \frac{1}{N}\right)\mathbf{E}(T_n) + 1.$$

v. Prouver enfin que l'espérance de la variable T_n est donnée par :

$$\mathbf{E}(T_n) = N\left[1 - \left(1 - \frac{1}{N}\right)^n\right].$$