Variables aléatoires sur un univers fini - TD

En autonomie.

Exercice 1 (D'après HEC 2000-BL)

Ce problème étudie deux suites de variables aléatoires discrètes. Il se compose de quatre parties.
Si le candidat ne parvient pas à établir un résultat demandé, il l'indiquera clairement, et il pourra pour la suite admettre ce résultat.

Dans tout le problème, n désigne un entier naturel non nul.

On considère une urne U_n contenant n boules numérotées de 1 à n.
On tire une boule au hasard dans U_n. On note k le numéro de cette boule.
Si k est égal à 1, on arrête les tirages.
Si k est supérieur ou égal à 2, on enlève de l'urne U_n les boules numérotées de k à n (il reste donc les boules numérotées de 1 à $k-1$), et on effectue à nouveau un tirage dans l'urne.
On répète ces tirages jusqu'à l'obtention de la boule numéro 1.
On note X_n la variable aléatoire égale au nombre de tirages nécessaires pour l'obtention de la boule numéro 1.
On note Y_n la variable aléatoire à la somme des numéros des boules tirées.
On note $\mathbf{E}(X_n)$ (respectivement $\mathbf{E}(Y_n)$) l'espérance de X_n (respectivement Y_n).
On note $h_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}$.

Partie 1 : Étude de la variable aléatoire X_n.

On note I_n la variable aléatoire égale au numéro de la première boule tirée dans l'urne U_n.

1) **(a)** Quelle est la loi de I_n ?

(b) Quelle est la loi conditionnelle de X_n sachant $I_n = 1$?

(c) Si n est supérieur ou égal à 2, montrer :

$$\forall j \in \mathbf{N}^*,\ \forall k \in \{2, \cdots, n\}, \quad \mathbf{P}(X_n = j | I_n = k) = \mathbf{P}(X_{k-1} = j - 1).$$

2) **(a)** Quelle est la loi de X_1 ?

(b) Quel est l'événement $(X_2 = 1)$? Donner la loi de X_2 et son espérance.

(c) Déterminer la loi de X_3 et son espérance.

3) **(a)** Montrer que X_n prend ses valeurs dans $\{1, 2, \cdots, n\}$.

(b) Déterminer $\mathbf{P}(X_n = 1)$ et $\mathbf{P}(X_n = n)$.

(c) Si n est supérieur ou égal à 2, montrer :

$$\forall j \geqslant 2,\ \mathbf{P}(X_n = j) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} \mathbf{P}(X_k = j - 1).$$

(d) Si n est supérieur ou égal à 3 et j supérieur ou égal à 2, calculer : $n\mathbf{P}(X_n = j) - (n-1)\mathbf{P}(X_{n-1} = j)$.
En déduire, si n est un entier supérieur ou égal à 2 :

$$\forall j \geqslant 1,\ \mathbf{P}(X_n = j) = \frac{n-1}{n} \mathbf{P}(X_{n-1} = j) + \frac{1}{n} \mathbf{P}(X_{n-1} = j - 1).$$

4) **(a)** Si n est supérieur ou égal à 2, montrer, en utilisant **3) (d)** : $\mathbf{E}(X_n) = \mathbf{E}(X_{n-1}) + \frac{1}{n}$.

(b) En déduire $\mathbf{E}(X_n)$.

5) Soit $(T_i)_{i \geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires telles que, pour tout i entier naturel non nul, T_i suit la loi de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{i}$. On pose : $S_n = \sum_{i=1}^{n} T_i = T_1 + T_2 + \cdots + T_n$.

(a) Vérifier que X_1 et T_1 ont même loi.

(b) Si n est supérieur ou égal à 2, montrer pour tout j entier naturel non nul :

$$\mathbf{P}\left(S_n = j\right) = \frac{1}{n}\mathbf{P}\left(S_{n-1} = j-1\right) + \frac{n-1}{n}\mathbf{P}\left(S_{n-1} = j\right).$$

En déduire que X_n et S_n on même loi.

(c) Retrouver ainsi $\mathbf{E}\left(X_n\right)$.

Partie 2 : Étude de la variable aléatoire Y_n.

6) Donner la loi de Y_1.

7) **(a)** Quelles sont les valeurs prises par Y_2 ?

(b) Quelle est la loi de Y_2.

8) **(a)** Si n est supérieur ou égal à 2, montrer, pour tout entier j non nul et tout entier k supérieur ou égal à 2 :

$$\mathbf{P}\left(Y_n = j | I_n = k\right) = \mathbf{P}\left(Y_{k-1} = j-k\right).$$

(b) Si n est supérieur ou égal à 2, en déduire, pour tout entier j supérieur ou égal à 1 :

$$\mathbf{P}\left(Y_n = j\right) = \frac{n-1}{n}\mathbf{P}\left(Y_{n-1} = j\right) + \frac{1}{n}\mathbf{P}\left(Y_{n-1} = j-n\right).$$

(c) Si n est supérieur ou égal à 2, montrer : $\mathbf{E}\left(Y_n\right) = \mathbf{E}\left(Y_{n-1}\right) + 1$. Que vaut $\mathbf{E}\left(Y_n\right)$ pour tout entier n non nul ?

Partie 3

On considère l'urne U_n contenant n boules numérotées entre 1 et n. À partir de l'urne U_n on effectue la suite de tirages décrite dans l'en-tête du problème. Pour i entier de $\{1, \cdots, n\}$, on définit $Z_i^{(n)}$ la variable aléatoire égale à 1 si, au cours de l'un quelconque des tirages, on a obtenu la boule numéro i, égale à 0 sinon.

9) Quelle est la loi de $Z_n^{(n)}$? Que dire de la variable $Z_i^{(n)}$?

10) **(a)** Si n est supérieur ou égal à 2 et i un entier de $\{1, \cdots, n-1\}$, montrer la relation :

$$\mathbf{P}\left(Z_i^{(n)} = 1\right) = \frac{1}{n} + \sum_{k=i+1}^{n} \frac{1}{n}\mathbf{P}\left(Z_i^{(k-1)} = 1\right).$$

(b) Montrer par récurrence, que pour tout n de $\mathbf{N}^*$ et pour tout i de $\{1, \cdots, n\}$, $Z_i^{(n)}$ suit la loi de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{i}$.

11) Que vaut $\sum\limits_{i=1}^{n} Z_i^{(n)}$? Retrouver ainsi $\mathbf{E}\left(X_n\right)$.

12) Retrouver $\mathbf{E}\left(Y_n\right)$.