Variables aléatoires finies

Les applications numériques peuvent se faire à la calculatrice.

1 Pour commencer

Exercice 1 (*)
On propose le jeu suivant :
Pour pouvoir jouer, il faut d'abord verser 1€, puis on jette deux dés simultanément.

- Si l'un des dés au moins présente un chiffre impair, on ne gagne rien.
- Si les dés présentent deux chiffres pairs différents, on gagne 1€.
- Enfin, si les dés présentent le même chiffre pair, on gagne une somme égale au total des points des deux dés.

Ce jeu est-il équitable ?

Exercice 2 (*) (Prédictions)
Madame Irma affirme qu'elle peut prédire le sexe des enfants à naître. Elle demande 5€ pour cette prédiction. De plus, en cas de prédiction erronée, elle s'engage à rembourser intégralement la somme perçue.
Si madame Irma trouve 1000 clients, quel gain moyen peut-on lui prédire ?

2 Exercices types

Exercice 3 (**)

1. On lance deux dés normaux, on note X_1 et X_2 leur résultats respectifs et $X = \max(X_1, X_2)$.
   (a) Déterminer la fonction de répartition de X sans calculer sa loi.
   (b) En déduire la loi de X.
   (c) Obtenir la loi de X directement par disjonction des cas selon les valeurs de X_1 et X_2.
2. De même avec 3 dés, donner la loi du maximum des trois.

Exercice 4 (**) (Le bonneteau)
On dispose de n gobelets (opaques) mis à l'envers devant soi. Un billet se trouve sous l'un d'eux.
On retourne les gobelets un à un jusqu'à trouver le billet. Quelle est la probabilité de trouver le billet au k-ième essai ?

Exercice 5 (**) (Transmission bruitée)
Une information est transmise sous forme d'une suite de 0 et de 1. L'existence d'un bruit lors du transport peut transformer un 1 en 0 et vice-versa avec une probabilité $1-p$. Le bruit agit de façon indépendante sur chaque caractère de la suite.
Pour se prémunir des effets du bruit, on transmet trois fois le même message. À la réception, s'il y a une majorité de 1, on considère que l'information est 1, sinon c'est 0.

1. Pour un message avec un seul caractère,
   (a) quelle est la probabilité que la réception soit juste ?
   (b) À quelle condition sur p, la fiabilité de réception est-elle meilleure avec un triple envoi qu'avec l'envoi simple ?
2. Pour un message à n caractères . Quelle est la probabilité que le message soit juste ?
3. Quel est le nombre moyen de caractères justes à la réception pour une suite de n caractères.

Exercice 6 (**)
On s'intéresse à la proportion de personnes dans le monde qui vivent sous le seuil de pauvreté. On note p cette proportion.
Pour évaluer p, on sonde un nombre n de personnes prises au hasard et on obtient un nombre X de réponses favorables. On veut savoir combien de personnes on doit sonder pour réduire notre marge d'erreur dans l'estimation de p.
Donner une valeur de n à partir de laquelle la probabilité de l'événement $\left\{\left|\frac{X}{n}-p\right| \geqslant 0,05\right\}$ est inférieure à 10% ?

3 Entraînement

Exercice 7 (*)
Soit $X \sim \mathcal{B}(n,p)$ avec $p \in]0,1[$, on pose $Y = \dfrac{1}{1+X}$.

1. Donner la loi de Y.
2. Montrer que $\mathbf{E}(Y) = \frac{1}{n+1}\frac{1-q^{n+1}}{1-q}$, avec $q = 1-p$

Exercice 8 (*)
n urnes sont numérotées de 1 à n. La $k^{\text{ème}}$ urne contient une boule jaune et k boules rouges. On tire au hasard une boule dans chaque urne.
Quel est le nombre moyen de boules jaunes tirées en fonction de n ?
Donner un équivalent de ce nombre lorsque $n \to +\infty$.

Exercice 9 (**)
Une urne contient b boules blanches, n boules noires.
On effectue des tirages successifs. Après chaque tirage, on remet la boule tirée dans l'urne en y rajoutant a boules de la même couleur.
On répète l'expérience à chaque tirage.
On note B_i l'événement « obtenir une boule blanche au tirage i », et
N_i l'événement « obtenir une boule noire au tirage i ».

1. Calculer B_1 et B_2.
2. Pour $p, q \in \mathbf{N}$, déterminer la probabilité d'obtenir d'abord p boules blanches puis q boules noires.
3. Déterminer la probabilité d'obtenir exactement p boules blanches en $p+q$ tirages.
4. Préciser cette valeur pour $b = n = a$.
5. Simuler cette expérience sous Python.

Exercice 10 (*)
Un sac contient n jetons ($n \geqslant 17$) dont 5 rouges et 10 blancs. Les autres sont verts. Un joueur tire un jeton au hasard.
S'il est rouge, il gagne 5€ ; s'il est blanc, il perd 3€ ; s'il est vert, il effectue un nouveau tirage sans remettre le jeton.
Si le second tirage donne un jeton rouge, il gagne 4€, s'il est blanc il perd 1€, s'il est encore vert la partie est nulle et s'arrête.
Soit X la variable aléatoire associée au gain algébrique du joueur.

1. Établir en fonction de n la loi de probabilité de X.
2. Calculer $\mathbf{E}(X)$. Pour quelle valeur de n, le jeu est-il équitable ?

Exercice 11 (**)
Une urne contient six boules numérotées de 1 à 6. On en tire trois simultanément. Soit X la variable aléatoire égale au plus petit des nombres obtenus.

1. Établir la loi de X.
2. Calculer $\mathbf{E}(X)$, $\mathbf{V}(X)$ et σ(X).

Exercice 12 (***)
On effectue des tirages avec remise dans une urne contenant n boules numérotées de 1 à n.
On définit une suite $(U_i)_{i\in\mathbf{N}^*}$ de variables aléatoires avec $U_1 = 1$ et pour $i \geqslant 2$,

- $U_i = 1$ si au i-ème tirage, on obtient un numéro qui n'a été obtenu à aucun des $i-1$ tirages précédents,
- $U_i = 0$, sinon.

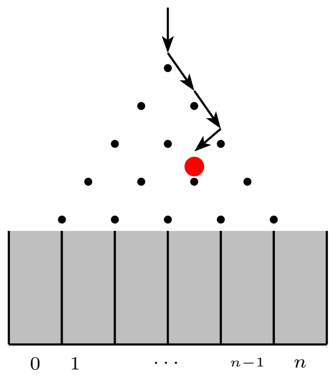
Pour $i \geqslant 1$, on définit T_i la variable aléatoire égale au numéro obtenu au i-ème tirage.

1. Donner la loi de U_2.
2. (a) Pour $i \geqslant 1$, donner la loi de T_i.
   (b) À l'aide des probabilités totales, montrer que
   $$\forall i \in \{2, \cdots, n\}, \mathbf{P}(U_i = 1) = \left(\frac{n-1}{n}\right)^{i-1}.$$
   (Vérifier que la cette formule reste valable pour $i = 1$.)

Pour tout entier $k \geqslant 2$, on note $V_k(n)$ la variable aléatoire égale au nombre de numéros distincts obtenus au cours des k premiers tirages.

3. (a) Exprimer $V_k(n)$ en fonction des variables U_i.
   (b) En déduire l'espérance de $V_k(n)$.
   (c) Calculer les limites $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbf{E}(V_k(n))$ et $\lim\limits_{k\to+\infty} \mathbf{E}(V_k(n))$.
   Interpréter.

Exercice 13 (**) (Planche de Galton)
La planche de Galton est une planche sur laquelle sont plantés des clous suivant un schéma pyramidal.
On fait tomber des billes qui ont pour chaque clou, autant de chance de passer à droite qu'à gauche.
En bas de la pyramide, chaque bille remplit un tube en fonction de la colonne d'arrivée.



On numérote de 0 à n (de gauche à droite) les tubes en bas de la pyramide.
On note X la variable aléatoire correspondant au tube d'arrivée de la boule.

1. Exprimer la valeur de X en fonction du trajet suivi par la boule, en déduire la loi de X.
2. Donner $\mathbf{E}(X), \mathbf{V}(X)$.

Exercice 14 (**)

1. Le lac contient à l'instant initial 5 petits carpeaux et 3 grosses carpes.
   Sachant que le pêcheur pèche successivement 3 poissons (et les garde). Si on note X la variable aléatoire désignant le nombre de carpeaux pêchés, quelle est la loi de X, son espérance ?
2. Un peu plus tard, le lac contient 200 carpeaux et 80 grosses carpes. Le pêcheur prend à nouveau 3 poissons. Donner la nouvelle loi de X, son espérance et sa variance.

4 Approfondissement

Exercice 15 (***)
On lance 6000 fois un dé et on obtient 1105 fois le nombre 6. Est-ce normal ?

Exercice 16 (***)
Dans ce jeu, vous êtes face à votre adversaire, autour d'une table. Chacun des deux joueurs doit initialement cacher ses mains sous la table, puis, brusquement, montrer l'une des deux.
Si chacun a montré la main droite, votre partenaire vous donne 3€.
Il vous en donne 2 si chacun a montré la main gauche.
Si, par contre, vous montrez la main droite et lui la gauche, donnez-lui 1€,
et si enfin, vous montrez la main gauche alors qu'il montre la droite, donnez-lui 4€.
Si vous jouez de nombreuses fois à ce jeu avec astuce (mais sans tricher), vous pouvez être sûr de gagner de l'argent.
Comment procédez-vous ?