Variables aléatoires finies

Les applications numériques peuvent se faire à la calculatrice.

1 Pour commencer

Exercice 1 (*)
On propose le jeu suivant :
Pour pouvoir jouer, il faut d'abord verser 1€, puis on jette deux dés simultanément.

- Si l'un des dés au moins présente un chiffre impair, on ne gagne rien.
- Si les dés présentent deux chiffres pairs différents, on gagne 1€.
- Enfin, si les dés présentent le même chiffre pair, on gagne une somme égale au total des points des deux dés.

Ce jeu est-il équitable ?

Exercice 2 (*) (Prédictions)
Madame Irma affirme qu'elle peut prédire le sexe des enfants à naître. Elle demande 5€ pour cette prédiction. De plus, en cas de prédiction erronée, elle s'engage à rembourser intégralement la somme perçue.
Si madame Irma trouve 1000 clients, quel gain moyen peut-on lui prédire ?

Exercice 3 (indicatrice)**
Pour un événement A de Ω, on appelle variable indicatrice de A, la variable aléatoire $\mathbf{1}_A$ définie par

$$\forall \omega \in \Omega,\ \mathbf{1}_A(\omega) = 1 \text{ si } \omega \in A,\ 0 \text{ sinon.}$$

1. Pour A et B deux événements, montrer :
   (a) $\mathbf{1}_{\overline{A}} = 1 - \mathbf{1}_A$,
   (b) $\mathbf{1}_{A\cap B} = \mathbf{1}_A \times \mathbf{1}_B$,
   (c) $\mathbf{1}_{A\cup B} = \mathbf{1}_A + \mathbf{1}_B - \mathbf{1}_A \times \mathbf{1}_B$.
2. Montrer que $\mathbf{E}(\mathbf{1}_A) = \mathbf{P}(A)$.
3. Pour une famille de n événements $(A_k)_{k\in[\![1,n]\!]}$, interpréter la variable aléatoire : $\sum\limits_{k=1}^{n} \mathbf{1}_{A_k}$.
4. (*D'après Bernoulli*)
   Parmi $2n$ personnes qui forment n couples, m personnes décèdent. En moyenne, combien de couples ont survécu ?

2 Exercices types

Exercice 4 (**)

1. On lance deux dés normaux, on note X_1 et X_2 leur résultats respectifs et $X = \max(X_1, X_2)$.
   (a) Déterminer la fonction de répartition de X sans calculer sa loi.
   (b) En déduire la loi de X.
   (c) Obtenir la loi de X directement par disjonction des cas selon les valeurs de X_1 et X_2.
2. De même avec 3 dés, donner la loi du maximum des trois.

Exercice 5 (**) (Le bonneteau)
On dispose de n gobelets (opaques) mis à l'envers devant soi. Un billet se trouve sous l'un d'eux.
On retourne les gobelets un à un jusqu'à trouver le billet.
Quelle est la probabilité de trouver le billet au k-ième essai ?

Exercice 6 (**) (Transmission bruitée)
Une information est transmise sous forme d'une suite de 0 et de 1. L'existence d'un bruit lors du transport peut transformer un 1 en 0 et vice-versa avec une probabilité $1-p$. Le bruit agit de façon indépendante sur chaque caractère de la suite.
Pour se prémunir des effets du bruit, on transmet trois fois le même message. À la réception, s'il y a une majorité de 1, on considère que l'information est 1, sinon c'est 0.

1. Pour un message avec un seul caractère,
   (a) quelle est la probabilité que la réception soit juste ?
   (b) À quelle condition sur p, la fiabilité de réception est-elle meilleure avec un triple envoi qu'avec l'envoi simple ?
2. Pour un message à n caractères . Quelle est la probabilité que le message soit juste ?
3. Quel est le nombre moyen de caractères justes à la réception pour une suite de n caractères.

Exercice 7 (**)
On s'intéresse à la proportion de personnes dans le monde qui vivent sous le seuil de pauvreté. On note p cette proportion.
Pour évaluer p, on sonde un nombre n de personnes prises au hasard et on obtient un nombre X de réponses favorables. On veut savoir combien de personnes on doit sonder pour réduire notre marge d'erreur dans l'estimation de p.
Donner une valeur de n à partir de laquelle la probabilité de l'événement $\left\{\left|\frac{X}{n} - p\right| \geqslant 0,05\right\}$ est inférieure à 10% ?

Exercice 8 (**)
Trois garçons souhaitent chacun inviter une fille parmi Alice, Béatrice et Clémence. Chaque garçon choisit une fille indépendamment des autres et lui envoie un message.

1. Quelle est la probabilité qu'Alice soit invitée ?
2. On note A le nombre d'invitations reçues par Alice. Donner la loi de A et son espérance.
3. On note X la variable aléatoire égale au nombre de filles invitées. Donner la loi de X et son espérance.
4. On note Y la variable aléatoire égale au nombre de filles invitées plusieurs fois. Donner la loi de Y et son espérance.

3 Entraînement

Exercice 9 (*)
Soit $X \sim \mathcal{B}(n,p)$ avec $p \in]0,1[$, on pose $Y = \dfrac{1}{1+X}$.

1. Donner la loi de Y.
2. Montrer que $\mathbf{E}(Y) = \frac{1}{n+1}\frac{1-q^{n+1}}{1-q}$, avec $q = 1-p$

Exercice 10 (**)
Un sac contient n jetons ($n \geqslant 17$) dont 5 rouges et 10 blancs. Les autres sont verts. Un joueur tire un jeton au hasard.
S'il est rouge, il gagne 5€ ; s'il est blanc, il perd 3€ ; s'il est vert, il effectue un nouveau tirage sans remettre le jeton.
Si le second tirage donne un jeton rouge, il gagne 4€, s'il est blanc il perd 1€, s'il est encore vert la partie est nulle et s'arrête.
Soit X la variable aléatoire associée au gain algébrique du joueur.

1. Établir en fonction de n la loi de probabilité de X.
2. Calculer $\mathbf{E}(X)$. Pour quelle valeur de n, le jeu est-il équitable ?

Exercice 11 (**)
Une urne contient six boules numérotées de 1 à 6. On en tire trois simultanément. Soit X la variable aléatoire égale au plus petit des nombres obtenus.

1. Établir la loi de X.
2. Calculer $\mathbf{E}(X)$, $\mathbf{V}(X)$ et σ(X).

Exercice 12 (***)
On effectue des tirages avec remise dans une urne contenant n boules numérotées de 1 à n.
On définit une suite $(U_i)_{i\in\mathbf{N}^*}$ de variables aléatoires avec $U_1 = 1$ et pour $i \geqslant 2$,

- $U_i = 1$ si au i-ème tirage, on obtient un numéro qui n'a été obtenu à aucun des $i-1$ tirages précédents,
- $U_i = 0$, sinon.

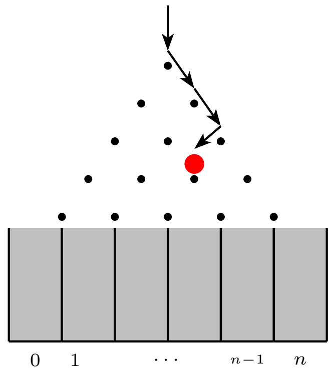
Pour $i \geqslant 1$, on définit T_i la variable aléatoire égale au numéro obtenu au i-ème tirage.

1. Donner la loi de U_2.
2. (a) Pour $i \geqslant 1$, donner la loi de T_i.
   (b) À l'aide des probabilités totales, montrer que
   $$\forall i \in \{2,\cdots,n\}, \mathbf{P}(U_i = 1) = \left(\frac{n-1}{n}\right)^{i-1}.$$
   (Vérifier que la cette formule reste valable pour $i = 1$.)

Pour tout entier $k \geqslant 2$, on note $V_k(n)$ la variable aléatoire égale au nombre de numéros distincts obtenus au cours des k premiers tirages.

3. (a) Exprimer $V_k(n)$ en fonction de la variable U_i.
   (b) En déduire l'espérance de $V_k(n)$.

Exercice 13 (**) (Planche de Galton)
La planche de Galton est une planche sur laquelle sont plantés des clous suivant un schéma pyramidal.
On fait tomber des billes qui ont pour chaque clou, autant de chance de passer à droite qu'à gauche.
En bas de la pyramide, chaque bille remplit un tube en fonction de la colonne d'arrivée.



On note $n+1$ le nombre de tubes en bas de la pyramide, et on les numérote de 0 à n (de gauche à droite).
On note X la variable aléatoire correspondant au tube d'arrivée de la boule.

1. Exprimer la valeur de X en fonction du trajet suivi par la boule, en déduire la loi de X.
2. Donner $\mathbf{E}(X), \mathbf{V}(X)$.

Exercice 14 (**) (Mission impossible)
Vous devez trouver le code pour désamorcer une bombe.
Vous faites différents essais jusqu'à ce que vous réussissiez.
Vous savez que le code est composé de 4 chiffres pris entre 0 et 9.

1. Quelle est la probabilité de trouver le code au k-ième essai.
2. Quelle est la probabilité de trouver le code avant le k-ième essai.
3. À partir de maintenant, on suppose que l'on ne peut essayer que 100 codes avant que la bombe explose.
   On sait également qu'il y a une proportion p de superhéros dans la population (qui arrivent toujours à désamorcer la bombe).
   (a) Quelle est la probabilité de réussir à désamorcer la bombe ?
   (b) Sachant que vous avez désamorcé la bombe, quelle est la probabilité que vous soyez un super-héros ?
   (c) Sachant que vous avez désamorcé une première bombe, quelle est la probabilité que vous réussissiez à désamorcer la seconde ?

4 Approfondissement

Exercice 15 (**)
Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $[\![1, n]\!]$, montrer que

$$\mathbf{E}(X) = \sum_{k=1}^{n} \mathbf{P}(X \geqslant k).$$

Exercice 16 (***)
On lance 6000 fois un dé et on obtient 1105 fois le nombre 6. Est-ce normal ?

Exercice 17 (***)
Dans ce jeu, vous êtes face à votre adversaire, autour d'une table. Chacun des deux joueurs doit initialement cacher ses mains sous la table, puis, brusquement, montrer l'une des deux.
Si chacun a montré la main droite, votre partenaire vous donne 3€.
Il vous en donne 2 si chacun a montré la main gauche.
Si, par contre, vous montrez la main droite et lui la gauche, donnez-lui 1€,
et si enfin, vous montrez la main gauche alors qu'il montre la droite, donnez-lui 4€.
Si vous jouez de nombreuses fois à ce jeu avec astuce (mais sans tricher), vous pouvez être sûr de gagner de l'argent.
Comment procédez-vous ?

Exercice 18 (***)
Soit une variable aléatoire X discrète prenant chaque valeur x_i avec la probabilité p_i, pour $i \in [\![1, n]\!]$. On définit l'entropie de X par

$$h(X) = -\sum_{i=1}^{n} p_i \ln(p_i).$$

1. Déterminer $h(X)$ si X suit une loi certaine.
2. Déterminer $h(X)$ si X suit une loi uniforme sur $[\![1, n]\!]$.
3. Déterminer la borne supérieure de $h(X)$ pour X une variable alétoire prenant au plus n valeurs.
   Indication : on pourra montrer qu'elle est atteinte pour la loi uniforme.