Analyse asymptotique

Notation : $DL_k(x)$ désigne le développement limité à l'ordre k en x

Exercice 1 (*)
Faire un développement limité (ou asymptotique) de

1. $DL_3(0)$ de $\ln\left(\frac{x^2+1}{x+1}\right)$
2. $DL_3(0)$ de $\ln(1+\sin x)$
3. $DL_3(1)$ de $\cos(\ln(x))$
4. $DL_6(0)$ de $\ln(\cos x)$
5. $DL_7(0)$ de $\sin(\arctan(x))$
6. $DL_4(1)$ de $(\ln x)^2$
7. $DL_3(0)$ de $\mathrm{e}^{\sin x}$
8. $DL_8(0)$ de $\sin^6 x$
9. $DL_2(0)$ de $\dfrac{\arctan x - x}{\sin x - x}$
10. $DL_3(0)$ de $\ln\left(\tan\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right)$
11. $DL_3\left(\frac{\pi}{4}\right)$ de $\ln\sin x$
12. $DL_3(0)$ de $(1+x)^{\frac{1}{x}}$
13. $DA_2(+\infty)$ de $x\left(\sqrt{x^2+\sqrt{x^4+1}}-x\sqrt{2}\right)$
14. $DA_4(+\infty)$ de $\sqrt[3]{x^3+x}-\sqrt[3]{x^3-x}$

Exercice 2 (**)
Donner le développement à l'ordre 5 en 0 de arcsin par les deux méthodes suivantes

1. $\arcsin'(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
2. $\sin(\arcsin x)=x$ pour $x\in[-1;1]$

Exercice 3 (*)
Déterminer les développements limités suivants :

1. $DL_3(0)$ de $\frac{\ln(1+x)}{\mathrm{e}^x-1}$
2. $DL_2(0)$ de $\frac{\arctan x}{\tan x}$
3. $DL_2(1)$ de $\frac{x-1}{\ln x}$

Exercice 4 (**) (Équivalent simple)
Donner une équivalent simple en 0 de

$$(1+\sin x)^x-(1+x)^{\sin x}$$

Exercice 5 (**)
Déterminer les développements limités suivants :

1. $DL_{10}(0)$ de $\int_x^{x^2}\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1+t^4}}$.
2. $DL_3(2\pi)$ de $\sin\sqrt{x^2-3\pi^2}$.

Exercice 6
Soit $f:]-1,0[\cup]0,+\infty[\to\mathbb{R}$ définie par

$$f(x)=\frac{\ln(1+x)-x}{x^2}$$

Montrer que f peut être prolongée par continuité en 0 et que ce prolongement est alors dérivable en 0.
Quelle est alors la position relative de la courbe de f par rapport à sa tangente en ce point ?

Exercice 7
Montrer que la fonction

$$f:x\mapsto\frac{x}{\mathrm{e}^x-1}$$

peut être prolongée en une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 8 (**) (Étude locale d'une réciproque)
Montrer que l'application $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ définie par $f(x)=x\mathrm{e}^{x^2}$ admet une application réciproque définie sur $\mathbb{R}$ et former le $DL_5(0)$ de f^{-1}.

Exercice 9 (**)
Soit f la fonction définie par

$$f(x)=x^2\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$$

Étudier la branche infinie de f en $+\infty$ et donner la position des éventuelles asymptotes par rapport à la courbe.

Exercice 10 (**)
Soient a un réel non nul et f la fonction définie au voisinage de 0 par

$$f(x)=\frac{\ln(1+ax)}{1+x}$$

Déterminer les éventuelles valeurs de a pour lesquelles f présente un point d'inflexion en 0.
Un point d'inflexion est un changement de sens de courbure de la courbe.