Fractions rationnelles

1 Calculs

Exercice 1 (*)
Décomposer en éléments simples sur $\mathbf{R}$ et sur $\mathbf{C}$

1) $F_1 = \dfrac{X^3}{(X-1)(X+2)}$.

2) $F_2 = \dfrac{X^5+1}{X(X-1)}$.

3) $F_3 = \dfrac{1}{(X-1)^2(X+2)^2}$.

Exercice 2 (*)
Décomposer en éléments simples sur $\mathbf{R}$ et sur $\mathbf{C}$

1) $F_2 = \dfrac{X^2}{(X^2-1)(X^2+1)}$.

2) $F_3 = \dfrac{X^4+1}{X^2-1}$.

3) $F_4 = \dfrac{X^3}{(X^4+X^2+1)^2}$.

Exercice 3 (**)
Calculer les intégrales suivantes :

1) $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{2}}^{x} \frac{\mathrm{d}t}{\sin t}$.

2) $\displaystyle\int_{0}^{\pi} \frac{\sin(t)}{4-\cos^2(t)}\,\mathrm{d}t$.

3) $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\mathrm{d}t}{\cos^3(t)}$.

2 Entraînement

Exercice 4 (***)
Soient $A_1, A_2, \cdots, A_{n-1}$, $n-1$ réels strictement positifs et A_n quelconque.
Soient n-réels $a_1 < a_2 < \cdots < a_n$.
On pose

$$F = \frac{A_1}{X-a_1} + \frac{A_2}{X-a_2} + \cdots + \frac{A_n}{X-a_n}.$$

On note sa forme irréductible $\frac{P}{Q}$.

1) Montrer que $\deg P \leqslant n-1$.

2) Montrer que toutes les racines de P sont réelles.

Exercice 5 (***)
Soit $P \in \mathbf{R}[X]$ scindé à racines simples (et non nulles) sur $\mathbf{R}$.
On suppose $\deg P = n$ et on note $x_1 < x_2 < \cdots < x_n$ ses racines.
Montrer que

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{x_k P'(x_k)} = -\frac{1}{P(0)}.$$