Limites et continuité

1 Limites

Exercice 1 (*)
Pour chacune des fonctions suivantes dire si elle admet une limite au point a, une limite à droite, à gauche.
Si elle est définie en a, étudier sa continuité en a, à droite de a, à gauche de a.
Si elle n'est pas définie en a, étudier si elle admet un prolongement par continuité en a.

1) $x \mapsto \dfrac{1}{x-1}$ en $a = 1$.

2) $x \mapsto \dfrac{|x|}{x}$ en $a = 0$.

3) $x \mapsto \lfloor x \rfloor$ en $a = 1$.

4) $x \mapsto x\left|1 + \dfrac{1}{x}\right|$ en $a = 0$.

5) $x \mapsto x \sin \dfrac{1}{x}$ en $a = 0$.

6) $x \mapsto \dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}$ en $a = 0$.

7) $x \mapsto \dfrac{2x^2 - 5x + 1}{x^2 - 1}$ en $a = 1$.

8) $x \mapsto \sqrt{x} \ln x$ en $a = 0$.

9) $x \mapsto |x| \ln |x|$ en $a = 0$.

10) $x \mapsto x^{\pi}$ en $a = 0$.

11) $x \mapsto \dfrac{2x^2 - 5x + 3}{x^2 - 1}$ en $a = 1$.

12) $x \mapsto \dfrac{x^3 - 2x^2 + 1}{x^2 - 7x}$ en $a = 0$.

Exercice 2 (**)
Déterminer les limites suivantes si elles existent :

1. $\lim\limits_{x \to 0} x \left\lfloor \dfrac{1}{x} \right\rfloor$.
2. $\lim\limits_{x \to 1^+} \ln(x) \ln(\ln x)$.

Exercice 3 (***)

$$f : x \mapsto \frac{x^x}{\lfloor x \rfloor^{\lfloor x \rfloor}}$$

La fonction admet-elle une limite en $+\infty$?
Indication : étudier $f(n)$ et $f(n + \frac{1}{2})$.

2 Fonctions usuelles

Exercice 4 (**)
Étudier la continuité sur $\mathbf{R}$ de l'application

$$f : x \mapsto \lfloor x \rfloor + \sqrt{x - \lfloor x \rfloor}.$$

Exercice 5 (**)
Soit $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ définie par

$$f : x \mapsto \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}.$$

1. Déterminer le domaine de définition de f. On le notera D.
2. Déterminer la parité de f.
3. Montrer que f est bijective de $\mathbf{R}$ dans un intervalle à déterminer.
4. Représenter graphiquement f et f^{-1} dans un repère orthonormé (indiquer ses éventuelles asymptotes et ses tangentes remarquables).

Exercice 6 (***)
Étudier la continuité de la fonction définie sur $\mathbf{R}_+$.

$$f : x \mapsto \sup_{n \in \mathbb{N}} \frac{x^n}{n!}$$

3 Continuité

Exercice 7 (*)
Montrer qu'un polynôme réel de degré impair admet au moins une racine réelle.

Exercice 8 (**)
Montrer qu'une application continue périodique sur $\mathbf{R}$ est bornée et atteint ses bornes.

Exercice 9 (*)
Soit $f \in \mathcal{C}^0([0,1];[0,1])$.
Montrer que f admet un point fixe dans $[0,1]$, c'est-à-dire $x_0 \in [0,1]$ tel que $f(x_0) = x_0$.

Exercice 10 (**)
Soit $f \in \mathcal{C}^0(\mathbf{R}_+, \mathbf{R}_+)$ telle que $\lim\limits_{x \to +\infty} = \ell < 1$.
Montrer que f admet un point fixe.

Exercice 11 (**)
Montrer que les seules applications continues sur $\mathbf{R}$ à valeurs dans $\mathbf{Z}$ sont les applications constantes.

Exercice 12 (**)
Soit $f : \mathbf{R}_+ \to \mathbf{R}_+$, continue, telle que

$$\forall x \in \mathbf{R}_+^*, \ f(x) < x.$$

1. Montrer que $f(0) = 0$.
2. Montrer que pour tout $(a,b) \in \mathbf{R}_+^*$, avec $a \leqslant b$, il existe $M \in [0,1[$, tel que

$$\forall x \in [a,b], \ f(x) \leqslant Mx.$$

Exercice 13 (**)

1. Soit f une application continue surjective de $\mathbf{R}_+$ sur $\mathbf{R}$. Montrer que pour tout $y \in \mathbf{R}$, y admet une infinité d'antécédents par f.
2. Ce résultat est-il aussi valable si l'application est de $\mathbf{R}_+^*$ sur $\mathbf{R}$? Justifier.
3. Donner l'exemple d'une application continue surjective de $\mathbf{R}_+$ sur $\mathbf{R}$. Démontrer que l'exemple est valable.

Exercice 14 (***)
Soient $a < b$ deux réels, et f une fonction croissante sur $]a, b]$ et continue en a.
Montrer que f est croissante sur $[a, b]$.
Faire de même avec la stricte croissance.

4 Approfondissement

Exercice 15 (**)

1. Prouver le théorème suivant :

   Soit f une fonction **monotone** sur un intervalle I, alors $f(I)$ est un intervalle si et seulement si f est continue sur I.

2. Trouver une fonction non monotone, telle que $f(I)$ soit un intervalle, mais f non continue.

Exercice 16 (**)
Soit f strictement décroissante et continue sur $\mathbf{R}$.
Montrer que f admet un unique point fixe.

Exercice 17 (***)
Soit $f : \mathbf{R}_+^* \to \mathbf{R}$ une application croissante telle que $x \mapsto \dfrac{f(x)}{x}$ soit décroissante. Montrer que f est continue.

Exercice 18 (***)
Soit f continue sur $[0, 1]$ à valeurs dans $[0, 1]$.

1. Montrer que $\forall n \in \mathbf{N}^*, \exists a_n \in [0, 1], f(a_n) = a_n^n$.
2. En supposant f strictement décroissante, montrer que $\forall n \in \mathbf{N}^*, a_n$ est unique et étudier la suite (a_n).

Exercice 19 (***)
Soit $f : [0, +\infty[\to [0, +\infty[$ continue vérifiant

$$f \circ f = \mathrm{Id}.$$

Déterminer f.

Exercice 20 (***)
Soit $f \in \mathcal{C}([0, 1]; \mathbf{R}$ telle que $f(0) = f(1)$.
Montrer que

$$\forall n \in \mathbf{N}^*, \exists \alpha_n \in [0, 1], \text{ tel que } f\left(\alpha_n + \frac{1}{n}\right) = f(\alpha_n).$$

5 Suites implicites

Exercice 21
Soit $n \geqslant 3$.

1. Montrer que l'équation $\mathrm{e}^x = x^n$ admet deux solutions sur $]0, +\infty[$, notées u_n et v_n et telles que $1 < u_n < \mathrm{e} < v_n$.
2. Montrer que la suite (u_n) converge et déterminer sa limite.
3. Déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n$.
4. Montrer que $v_n \sim n \ln n$.

Exercice 22
Pour tout entier $n \geqslant 1$, on considère la fonction f_n définie sur $\mathbf{R}_+$ par

$$f_n(x) = \sum_{k=1}^{n} k x^k.$$

1. Pour tout $n \geqslant 1$, montrer que l'équation $f_n(x) = 1$ admet une unique solution sur $\mathbf{R}_+$ que l'on notera u_n.
2. En comparant $f_{n+1}(u_n)$ et $f_{n+1}(u_{n+1})$, montrer que la suite u est monotone.
3. En déduire que la suite converge.

Exercice 23
Soit $n \in \mathbf{N}^*$,
On considère la fonction f_n définie sur $\mathbf{R}$ par

$$f_n(x) = x^{n+1} - x^{n-1} + 1$$

1. Dresser le tableau de variations de f_n, préciser le nombre de solutions de l'équation $f_n(x) = 3 + \frac{1}{n}$.
2. On note x_n l'unique solution positive de l'équation précédente.
   (a) Déterminer x_1.
   (b) Montrer que $\forall n \in \mathbf{N}^*,\ x_n \geqslant 1$.
   (c) Étudier le signe de $f_{n+1}(x) - f_n(x)$ pour tout $x \geqslant 1$. En déduire la monotonie de la suite $(x_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$
3. Montrer que la suite $(x_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$ converge et déterminer sa limite.